وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي

جامعة سبها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

بحث مقدم لإستكمال متطلبات الحصول على درجة البكالوريوس

في الرياضيات

بعنوان :

مقدمة عن الإستقراء الرياضي وتطبيقاته

إعداد الطالبة :

سعدة عبدالقادر علي الفيلوقى

تحت إشراف :

الأستاذة: صفاء حسين الحضيري

للعام الجامعي 2018م – 2019م

بسم الله الرحيم

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا

صدق الله العظيم

الآية (114) من سورة طه

الإهـداء

لله عز وجل أولا الذي ساعدنا ووفقنا علي ذلك ولولاه ما كنا لنصل.

وإلي من بلغ الرسالة وأدى الامانه ... ونصح الأمة ... إلي نبي الرحمة ونور العالمين (سيدنا محمد صلي الله عليه وسلم).

إلي كل من علمني حرفا أصبح سنا برقة يضيء الطريق أمامي أستاذتنا الكرام ... وأخص بشكري الأستاذة الفاضلة : صفاء حسين الحضيرى التي لم تدخر جهدها في مساعدتي وكانت تحثني في بحتي وترغبني فيه وتقوى عزمي عليه فلها من الله الأجر ومنى خالص الشكر والتقدير حفظها الله ورعاها ومتعها بالصحة والعافية ونفع بمعلوماتها .

إلي من كلله الله بالهيبهوالوقار..إلي من علمني العطاء دون إنتظار ... إلي من أحمل أسمه بكل افتخار...أرجو الله أن يمد في عمرك وستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلي الأبد ... والدي العزيز .

إلي ملاكي في هذه الحياة ...إلي معني الحب والحنان... إلي بسمة الحياة وسر الوجود ... إلي من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي ...إلي جنتي ...أمي العزيزة .

إلي من بهم أكبر وعليهم أعتمد ... إلي شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي إلي من بوجدهم اكتسبت قوة ومحبة لا حدود لها ... إلي من أري السعادة في ضحكتهم والتفاؤل في أعينهم إلي الوجهة المفعم بالبراءة ...إخواتي وأخواتي .

إلي الأخوات التي لم تلدهن أمي إلي من تحلو بالأخاء والوفاء إلي ينابيع الصدق الصافي إلي ...زميلاتي وصديقاتي العزيزات .

إلي صديقتي وتوأم روحي إلي من ساندتني في حزني وفرحت لفرحي إلى غاليتى ... عفراء عبدالله

كلمة شكر

أحمد الله عز وجل علي منه وعونه لإتمام هذا البحث . إلي الذي وهبني كل مايملك حتي أحقق له أماله .

إلي كل من كان يدفعني قدما نحو الأمام لينيل المبتغي .

الفهرس

الملخص

الإستقراء من الوسائل الرياضية و التي تستخدم في برهنة صحة جملة معينة سواء كانت في متغير واحد أو متغيرين. حيث ترتبط فكرتها بنفس فكرة سقوط أحجار الدومينو. إذا سقط الحجر الأول من الدومينو يليه سقوط الحجر الثاني ثم الحجر الثالث وهكذا إلي أخر حجر من الدومينو.

الإستقراء الرياضي هو أداة من أدوات البرهان المنطقية والمباشرة لبرهنة صحة أي مشكلة نطاقها مجموعة الأعداد الطبيعية وفقا لشروط معينة.

المقدمة

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات والذي لولاه ما جرى قلم، ولا تكلم لسان، و الصلاة والسلام على سيدنا محمد أفصح لسانا و أوضحهم بيانا، أما بعد:

الإستقراء الرياضي هو من اكتشاف اليونانيين في القرون القديمة و هو أحد أنواع البراهين الرياضية التي تستخدم عادة لبرهنة أن معادلة أو متباينة ما صحيحة لمجموعة لا نهائية من الأعداد الطبيعية وبصفة عملية يعتبر تساقط احجار لعبة الدومينو هي النظير للإستقراء الرياضي.

وهذا البحث يشتمل على فصلان وهما:

الفصل الأول درسنا الإستقراء الرياضي و مبادئه الأساسية للإستقراء كما درسنا نظرية مبدأ الإستقراء الرياضي الأساسي و بعض أنواع مبدأ الإستقراء الرياضي الأساسي مع أمثله تبين كل نوع منها.

أما الفصل الثاني فأوردنا فيه بعض الأمثله على الإستقراء الرياضي و هي الإستقراء الرياضي و رياضة كرة القدم و الإستقراء الرياضي و حركة مرور السيارات و الإستقراء الرياضي ولغز هانوي مع إثبات كل منهم.

وأخير نسأل الله عز وجل أن أكون وفقت في هذا البحث وأن مرجعا يستعان به ف مادة التحليل الحقيقي.

الفصل الأول

الإستقراء الرياضي و بعض أنواعه

بصفة عملية، تعتبر لعبة الدومينو هي نظير للإستقراء الرياضي. لنفرض أن أحجار الدومنيو مرتبة جيدا، وبالتالي عندما الحجر الأول من الدومينو يسقط، عندها بقية الأحجار المتتالية تسقط أيضا، ذلك عند دفع الدومينو الأول يسقط الدومنيو الثاني، وعندما يسقط الدومينو الثاني، يسقط الدومينو الثالث،وهكذا في نهاية المطاف نري كل أحجار الدومينو تسقط. خلال هذا الفصل سنتعرف عن آلية تطبيق الإستقراء الرياضي بعدد من الامثلة المختلفة.

لكي نثبت أن جملة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة ولتكن n، علينا أن نثبت أولا أنها صحيحة عندما $n = 1$، عندها نثبت أنه إذا كانت صحيحة لعدد صحيح موجب k، فإنها صحيحة عند $k + 1$.

1.1 نظرية :(مبدأ الإستقراء الرياضي الأساسي)

لتكن $p(n)$ هي جملة رياضية في المتغير n. لدينا

1) $p(1)$ صحيحة،

2) إذا كان $p(k)$ صحيحة لكل عدد طبيعي k، فإن $p(k+1)$ أيضا صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة(1.1):

من النظرية السابقة الخطوة (1) تسمى بخطوة الأساس (Basic Step) و الخطوة (2) تسمي بخطوة الإستقراء (أو فرضية الإستقراء) (InductionHypothesis).

مثال(1.1):

اثبت أن $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

الحل:

سوف نثبت صحة هذه الجملة الرياضية باستخدام الإستقراء الرياضي.

$$p(n):(1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2)$$

لنبدأ بخطوات الإستقراء:

1) عندما $n=1$ لدينا

$$p(1):(1=1^2)$$
$$\Longrightarrow \quad p(1):(1=1)$$

إذن $p(1)$ صحيحة.

2) نفرض أن $p(k)$ صحيحة لكل $k \in \mathbb{N}$. حيث

$$p(k): (1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

وسنبين صحة $p(k+1)$.

$$\begin{aligned} p(k+1) &= \big[(1 + 3 + 5 + \cdots + 2(k+1) - 1) \\ &= \big(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)\big) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) \\ &= (k+1)^2\big] \end{aligned}$$

إذن $p(k+1)$ صحيحة، وبالتالي فإن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم n.

نظرية (1.1):

إذا كانت S مجموعة من الأعداد الطبيعية الموجبة التى تحقق الشرطين :

1) $1 \in S$

2) إذا كانت $n \in S$ فإن $(n+1) \in S$

فإن $S = \mathbb{N}$.

البرهان :

نفرض أن S مجموعة الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين (1) و (2) و نفرض كذلك أن:

$$T = \mathbb{N} - S$$

ولكي نثبت أن $S = \mathbb{N}$ فإنه ينبغي علينا إثبات أن $T = \Phi$. لذلك نفرض $T \neq \Phi$ و نفرض أن m هو أصغر عدد طبيعي ينتمي إلى T (لاحظ أن $m \neq 1$ لأن $1 \in S$).

إذن $m \notin S$

وحيث أن m هو أصغر عدد طبيعي ينتمي إلى T، فإن $m - 1 \notin T$

وبالتالي نجد أن $m - 1 \in S$،

ومن الشرط (2) نحصل علي $m \in S$.

وهذا يتعارض مع كون $m \notin S$ ولهذا فإن الفرض الذي عنه هذا الإستقراء الرياضي هو فرض خاطئ و من ثم نحصل علي $T = \Phi$ وبالتالي نحصل علي $S = \mathbb{N}$.

ومن خلال ما تنص عليه النظرية السابقة يتبين لنا أن طريقة الإستفراء الرياضي تقوم علي ثلاث خطوات رئيسية يمكن تلخيصها فيما يلي:

الخطوة الأولى: إثبات صحة النظرية أو القانون عندما $n = 1$.

الخطوة الثانية: أفترض صحة النظرية أو القانون عندما $n = k$.

الخطوة الثالثة: إثبات صحة النظرية أو القانون عندما $n = k + 1$.

وببساطة شديدة نقول: إن الهدف من الإستقراء الرياضي هو إثبات صحة عبارة ما، قد تكون مساواة، أو عبارة تقبل القسمة علي عدد ما.

نظرية (2.1):

إذا كانت S مجموعة من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين:

1) $1 \in S$؛

2) إذا كانت $1, 2, 3, \dots, n \in S$ فإن $(n+1) \in S$.

فإن $n \in \mathbb{N}$.

البرهان:

نفرض إن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين (1) و (2)، ونفرض كذلك أن:

$$T = \{n : n \in \mathbb{N} , 1, 2, 3, \dots, n \in S\}$$

والأن نلاحظ ما يلي:

i. العدد $1 \in T$ و ذلك لأن $1 \in S$.

ii. بفرض أن $k \in T$، نجد من تعريف T أن $1, 2, 3, \dots, k \in S$ و بإستخدام الشرط (2) من النظرية نحصل علي $k + 1 \in S$.

وبالتالي يكون $1, 2, 3, \dots, k, k + 1 \in S$

وباستخدام الشرط (2) من النظرية نجد أن

$$k + 1 \in T$$

وباستخدام المبدأ الأول للإستقراء الرياضي نجد أن

$$T = \mathbb{N}$$

وبالتالي نحصل على

$$S = \mathbb{N}$$

و من خلال ما تنص عليه النظرية السابقة يتبين لنا أن الإستقراء الرياضي يبني علي ثلاث خطوات رئيسية يمكن تلخيصها فيما يلي:

الخطوة الأولى: إثبات صحة النظرية أو القانون عندما $n = 1$.

الخطوة الثانية:أفترض صحة النظرية أو القانون عندما $n \leq k$.

الخطوة الثالثة: إثبات صحة النظرية أو القانون عندما $n = k + 1$.

2.1 بعض أنواع الإستقراء الرياضي الأساسي:

Variations of the Basic Principle of Mathematical Induction

يوجد عدة اختلافات أو أنواع لمبدأ الإستقراء الرياضي. حيت أي كل هده الأنواع تؤدي إلي نفس الهدف. غير أن هده الأنواع تساعد بشكل أوسع في إثبات جمل مختلفة.

1.2.1 النوع الأول من مبدأ الإستقراء الرياضي:

لتكن $p(n)$ جمله في المتغير n لدينا

1. $p(k_0)$ صحيحة لبعض $k_0 \in \mathbb{N}$؛
2. إذا كان $p(k)$ صحيحة لكل $k \geq k_0$ فإن $p(k+1)$ أيضا صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

مثال (2.1):

أثبت أن $2^n > n^2$ لكل $n \geq 5$.

الحل :

سوف نثبت صحة هده المتباينة باستخدام مبدأ الإستقراء الرياضي النوع الأول:

أولا نفرض

$$p(n): (2^n > n^2)$$

لنبدأ بخطوات الإستقراء :

1. عندما $n = 5$ لدينا

$$p(5): (2^5 > 5^2) \Longrightarrow p(n): (32 > 25)$$

إذن $p(5)$ صحيحة.

2. نفرض إن $p(k)$ صحيحة لكل $k \geq 5$ ،

$$p(k): (2^k \geq k^2$$

وسنبين صحة $p(k+1)$

$p(k+1):(2^{k+1}=2.2^{k}>2k^{2}>(k+1)^{2})$

لاحظ أن من المتباينة لدينا

$$2k^{2}-(k+1)^{2}=(k-1)^{2}-2>0\ \forall k\geq 5$$

بما إن المتباينة صحيحة عندما $n=k$، إذن هي صحيحة عندما $n=k+1$

إذن حسب النظرية مبدأ الإستقراء الرياضي، المتباينة $2^{n}>n^{2}$ صحيحة لكل $n\in\mathbb{N}$.

في بعض الأحيان عندما يكون لدينا جمل علي هيئة متتابعات تكرارية، التي فيها الحد يعتمد علي بعض الحدود السابقة، فإن مبدأ الإستقراء لا يمكن تطبيقه. وذلك لأنه عندما نفرض $p(k)$ صحيحة للعدد k فقط غير كافي.

2.2.1 النوع الثاني من مبدأ الإستقراء الرياضي:

لتكن $p(n)$ جملة رياضية بدلالة المتغير n. لدينا

I. $p(1)$ و $p(2)$ صحيحة؛

II. إذا كان $p(k)$ و $p(k+1)$ صحيحة لكل $k\in\mathbb{N}$، فإن $p(k+2)$ أيضا صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم $n\in\mathbb{N}$.

مثال(3.1):

ليكن لدينا $\{a_{\mathrm{n}}\}$ متتابعة أعداد طبيعية، حيث $a_{1}=5$ ، $a_{2}=13$، $a_{n+2}=5a_{\mathrm{n+2}}-6a_{n}$

لكل $n\in\mathbb{N}$. أثبت أن $a_{n}=2^{n}+3^{n}$ لجميع قيم n.

الحل:

سوف نستخدم الإستقراء الرياضي لإثبات صحة هده المتتابعة.

أولا نفرض إن

$$p(n): (a_n = 2^n + 3^n), \forall n \geq 3$$

لنبدأ بخطوات الإستقراء:

1. عندما $n = 1$, $n = 2$ لدينا

$$a_1 = 2^1 + 3^1 = 5\,, a_2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

إذن $p(1), p(2)$ صحيحة.

2. نفرض أن $p(k)$ صحيحة لكل $p(k+1),$ $k \in \mathbb{N}$،حيث $p(k): (a_k = 2^k + 3^k)$ k صحيحة لكل

$k \in \mathbb{N}$ حيث $p(k+1): (a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1})$

$$p(k+2): (a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k = 5(2^{k+1} + 3^{k+1}) - 6(2^k + 3^k)$$
$$= 4 * 2^k + 9 * 3^k = 2^{k+2} + 3^{k+2})$$

إذن $p(k+2)$ صحيحة أيضا لكل $k \in \mathbb{N}$.

وبالتالي حسب مبدأ الإستقراء صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

عند أثبات بعض الجمل نحتاج إلي أن نفصل الجملة إلي حالتان وهي الحالات الفردية والحالات الزوجية. ولكي نجمعها معا نثبت صحتها بطريقة جيدة، علينا إتباع الخطوة التالية.

3.2.1 النوع الثالث من مبدأ الإستقراء الرياضي:

لتكن $p(n)$ جملة في المتغير $n \in \mathbb{N}$. لدينا:

1. $p(1)$, $p(2)$ صحيحة.
2. إذا كان $p(k)$ صحيحة لكل $k \in \mathbb{N}$، فإن $p(k+2)$ أيضا صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

مثال (4.1):

أثبت أن لجميع قيم n الطبيعية، يوجد الأعداد x, y, z حيث $x^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = 14^n$

الحل:

سوف نستخدم الإستقراء الرياضي حسب مبدأ الإستقراء النوع الرياضي النوع الثالث:

نفرض أن

$$p(n): (x^2 + y^2 + z^2 = 14^n)$$

لنبدأ خطوات الاستقراء.

1)عندما $n = 1$ لدينا الأعداد $x = 1 , y = 2 , z = 3$ تحقق أن $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14^1$

وعندما $n = 2$ لدينا الأعداد $x = 2 , y = 4 , z = 6$ تحقق أن $2^2 + 4^2 + 6^2 = 14^2$

إذا $p(1) , p(2)$ صحيحة.

2) نفرض أن $p(k)$ صحيحة لكل $k \in \mathbb{N}$، حيث يوجد أعداد ولتكن x_0, y_0, z_0 تحقق أن

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 14^k$$

وسنبين صحة $p(k+2)$.

إذن عندما $n = k + 2$، يوجد أيضا أعداد مميزة حيث

$$(14x_0)^2 + (14y_0)^2 + (14z_0)^2 = 14^{k+2}$$

إذن $p(k+2)$ صحيحة لجميع $k \in \mathbb{N}$.

وبالتالي حسب مبدأ الإستقراء $p(n)$ صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

4.2.1 النوع الرابع من مبدأ الإستقراء الرياضي:

لتكن $p(n)$ جملة بدلالة المتغير n لدينا:

1) $p(1)$ صحيحة.

2) إذا كانت $p(1) , p(2) , \dots , p(k)$ صحيحة، $k \in \mathbb{N}$ ، فإن $p(k+1)$ صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم n.

مثال (5.1):

لتكن $a_1, a_2, a_3, \dots$ متتابعة أعداد حقيقية تحقق أن $a_{i+j} \le a_i + a_j \,, \forall\, i, j = 1,2, \dots$

أثبت أن:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \ge a_n \,, \forall n \in \mathbb{N}$$

الحل:

سوف نستخدم مبدأ الإستقراء الرياضي:

نفرض أن

$$p(n): \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \ge a_n\right)$$

لنبدأ خطوات الإستقراء:

1. عندما $n = 1$ لدينا

$$p(1): (a_1 \ge a_1)$$

إذن $p(1)$ صحيحة.

2. نفرض أن المتباينة صحيحة عندما $n = 1,2, \dots, k$ أي

$p(1), p(2), \dots p(k)$ صحيحة حيث

$$a_1 \geq a_1$$

$$a_1 + \frac{a_2}{2} \geq a_2$$

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_k}{k} \geq a_k$$

لدينا

$$ka_1 + \frac{(k-1)a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

$$\Longrightarrow (k+1)\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k}\right) \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$
$$= (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + \cdots + (a_k + a_1) \geq ka_{k+1}$$

$$\Longrightarrow (k+1)\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \frac{a_{k+1}}{k+1}\right) \geq (k+1)a_{k+1}$$

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_{k+1}}{k+1} \geq a_{k+1}$$

إذن $p(k+1)$ صحيحة لكل $k \in \mathbb{N}$.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

5.2.1 الإستقراء الرياضي الخلفي:

لتكن $p(n)$ جملة في المتغير n لدينا:

1) $p(n)$ صحيحة لعدد لا نهائي من قيم n الطبيعية.

2) إذا كان $p(k)$ صحيحة لبعض قيم k حيث $(k > 1)$ فإن $p(k-1)$ أيضا صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

مثال (6.1):

أثبت أن لأي قيم عددية موجبة الوسط الحسابي (Arithmetic Mean) أكبر أو يساوي الوسط الهندسي (Geometric Mean).

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

الحل:

من المقدار $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2$، نحصل علي أن

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

إذن المتباينة متحققة عندما $n = 2$.

لنفرض أن المتباينة متحققة عندما $n = k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

لنعتبر الحالة $n = 2\,k$ من الخطوة السابقة عندما $n = 2$ ومع فرضية الاستقراء، لدينا

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2k} = \frac{1}{k}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \cdots + \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}\right)$$
$$\geq \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}{k}$$
$$\geq \sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2} * \sqrt{a_3a_4} * \dots * \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1a_2 \dots a_{2k}}$$

إذن المتباينة صحيحة عندما $n = 2k$.

حسب مبدأ الإستقراء الرياضي الخلفي المتباينة متحققة لجميع قوى العدد 2.

هذا يعني أن الشرط (1) من مبدأ الإستقراء السابق متحقق.

أي $p(n)$ متحققة لعدد لا نهائي من قيم n الطبيعية.

مرة أخرى، نفرض أن المتباينة متحققة عندما $n = k$ $(k \in \mathbb{N})$.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1a_2 \dots a_k}$$

مع $a_k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$ مع التبسيط نحصل علي $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_1a_2 \dots a_{k-1}}$

هذا يعنى أن المتباينة متحققة أيضا عندما $n = k - 1$

إذن حسب مبدأ الإستقراء الرياضي المتباينة متحققة.

6.2.1 مبدأ الإستقراء الرياضي في بعدين:

الإستقراء الرياضي في بعدين يحتوي علي 2 من المتغيرات وهما m, n لدينا

1) $p(n,1)$ و $p(m,1)$ تكون صحيحة $\forall m,n \in \mathbb{N}$

2) $p(m,n+1)$ و $p(m+1,n)$ تكونان صحيحتان لبعض $m,n \in \mathbb{N} \Leftarrow p(m+1,n+1)$ تكون صحيحة.

إذن $p(m,n)$ تكون صحيحة $\forall m,n \in \mathbb{N}$.

مثال(7.1):

أثبت أن عدد مجموعات الحل الصحيحة الغير سالبة للمعادلة.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \ \ , \forall n,m \in \mathbb{N}$$

تكون

$$f(m,n) = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} \qquad\qquad \rightarrow (1)$$

الحل:

لتكن

$$p(m,n): (\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!})$$

1. لكل $p(1,n)$، مجموعة الحل الصحيحة الوحيدة الغير سالبة للمعادلة $x_1 = n$ فقط نفسها.

عندما $m = 1$ فإن $f(1,n) = \frac{(n+1-1)!}{n!(1-1)!} = 1$

إذن $p(1,n)$ تكون صحيحة؛

عندما $p(m,1)$، مجموعة الحل الصحيحة الغير سالبة للمعادلة :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

تكون $(0,0,0\ldots،1)$ $\ldots(\ldots,0,1,0), (1,0,0،\ldots،0)$

حيث يوجد m عدد من مجموعات الحل معا.

عند $n = 1$، فإن $f(m,1) = \frac{(1+m-1)!}{1!(m-1)!} = m$

إذن $p(m,1)$ تكون صحيحة.

2. نفرض $p(m,n+1)$ و $p(m+1,n)$ تكونان صحيحتان لكل $m,n \in \mathbb{N}$.

عدد مجموعات الحل الصحيحة الغير سالبة للمعادلتين :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n + 1 \qquad \rightarrow (2)$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n \qquad \rightarrow (3)$$

$f(m,n+1) = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m+1)!}$، $f(m+1,n) = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ علي التوالي.

عند$p(m+1,n+1)$، مجموعات الحل الصحيحة الغير سالبة.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n + 1 \qquad \rightarrow (4)$$

يمكن تقسيمها إلي جزئيين وهما $x_{m+1} > 0$ أو $x_{m+1} = 0$:

إذن لدينا حالتان:

1) الحالة الأولي عندما $x_{m+1} = 0$ معادلة (4) تصبح المعادلة (2)، وعدد مجموعات الحل الصحيحة الغير سالبة هي $f(m, n+1) = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$

2) الحالة الثانية عندما $x_{m+1} > 0$ ،نستبدل $x_{\mathrm{m+1}}$ بالمقدار $x_{\mathrm{m+1}} + 1$ والمعادلة (4) تصبح:

$$n = x_{m+1} + x_m + \cdots + x_2 + x_1$$

مجموعات الحل الصحيحة الغير سالبة

$$f(m+1, n) = \frac{(n+m)!}{n!\, m!}$$

إذن مجموعات الحل الصحيحة الغير سالبة الكلية هي:

$$\frac{(n+m)!}{(n+1)!\,(m-1)!} + \frac{(n+m)!}{n!\, m!} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!\, m!}[(n+1)+m]$$
$$= \frac{[(n+1)+(m+1)-1]}{(n+1)!\,[(m+1)-1]!}$$

إذن $p(m+1, n+1)$ تكون صحيحة أيضا.

إذن حسب مبدأ الإستقراء الرياضي $p(m, n)$ تكون صحيحة $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

الفصل الثاني

أمثلة متنوعة على الإستقراء الرياضي

معظم الأمثلة التي نراها ونطبق عليها البرهان بالإستقراء الرياضي عبارة عن معادلات أو متباينات جبرية في هدا الفصل سوف نتعرف علي قوة وأهمية هذا المبدأ في العديد من فروع الرياضيات و ذلك من خلال سرد أمثلة متنوعة متميزة وبرهانها بالإستقراء الرياضي.

1.2 الاستقراء الرياضي ورياضة كرة القدم :

ليكن $n > 1$ حيث n عدد طبيعي. في رياضة كرة القدم يوجد n فريق. كل فريقان يلعبان ضد بعضهما مرة واحدة فقط وفي كل مباراة الانسحاب غير مسموح. اثبت انه تمكين ترقيم الفرق $1,2,\dots,n$ بطريقة تجعل الفريق i يهزم الفريق $(i+1)$ لكل $i = 1,2,\dots,n-1$.

الحل :

سنستخدم مبدأ الإستقراء الرياضي :

1) عندما يوجد فريقان فقط، ببساطة نقوم بترقيم الفريق الفائز بالرقم 1 والأخر بالرقم 2.

2) نفرض إمكانية ترقيم معين في حالة عدد k من الفرق. ونصنع في عين الاعتبار $k+1$ من الفرق.

نأخذ أي فرق k، ونرقمها من 1 إلي k حسب المطلوب وهذا ممكن حسب فرضية الاستقراء.

الأن سنحاول أن نرقم فريق ب $(k+1)$. إذا لم يفز هذا الفريق في أي مباراة، إذن ببساطة نرقمه ب $(k+1)$. وهذا ممكن طالما أنه هزم بواسطة الفريق المرقم k.

نفرض أنه فاز علي الأقل في مباراة واحدة. والفريق j هو الفريق الأصغر بين كل الفرق التي هزمت. إذن نعين العدد j لهذا الفريق ونعيد ترقيم الفرق الأصلية من j إلي n بزيادة العدد بمقدار.

يمكننا أن نلاحظ أن من السهل رؤية أن هذا الترقيم يتوافق مع المطلوب.

إذن بواسطة الإستقراء الرياضي، الجملة الأصلية صحيحة.

2.2 الإستقراء الرياضي وحركة مرور السيارات :

يوجد n من السيارات المتطابقة في مسار دائري. بين كل هذه السيارات هناك وقود كافي لسيارة واحدة لتكمل دورة السباق وضح أنه يوجد سيارة التي تستطيع أن تكمل دورة واحدة سباق عن طريق تجميع الوقود من السيارات الأخرى علي طريقها حول المسار في اتجاه عقارب الساعة.

الحل:

سنستخدم مبدأ الإستقراء الرياضي:

في حالة$n = 1$ بديهي.

نفرض أن الجملة صحيحة عندما $n = k$.

وستدرس صحة الجملة عند $n = k + 1$.

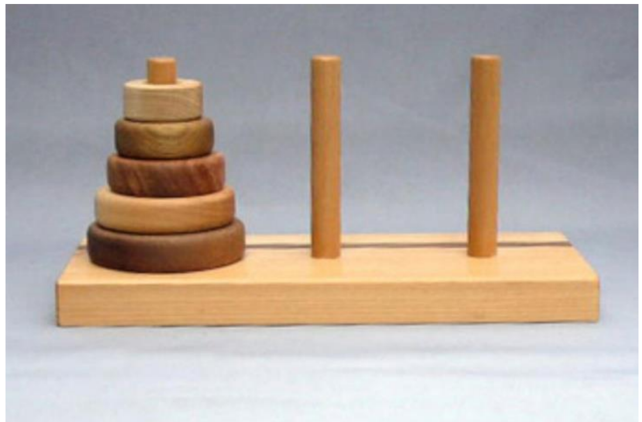
أولا لاحظ أنه يوجد السيارة A التي تستطيع أن تصل السيارة التالية B في اتجاه عقارب الساعة. عدا ذلك الوقود لكل السيارات لن يمكن كل السيارات لإكمال السباق.

الان فرغنا الوقود من السيارة B في A وأزلنا A. إذن يوجد عدد k من السيارات الباقية. بواسطة فرضية الاستقراء يوجد سيارة تستطيع أن تكمل السباق. بإعادة السيارة A، هذه السيارة أيضا إن تكمل السباق لأنه عندما تحصل عليه إلي السيارة A، الوقود المجمع سوف يكون كافي لتحصل عليه السيارة B.

إذن بواسطة الإستقراء الرياضي، الجملة صحيحة لجميع قيم n الطبيعية.

3.2 الإستقراء الرياضي ولغز هانوي :

برج هانوي هو عبارة عن أحجية رياضية من اختراع العالم الفرنسي إدوارد لوكس (Edward Lucas) في أواخر القرن الثامن عشر. حيث فكرة هذه الأحجية مستوحاه من أسطورة قديمة تدور حول وجود معبد في هانوي في فيتنام، فا يوجد 3 أعمدة و 64 قرص مرتبة في العمود الأول من الأكبر إلي الأصغر.



هدف الأحجية :

نقل كل الأقراص من العمود الأول إلي الأخير بمساعدة العمود الثاني بأقل عدد من الحركات.

شروط الأحجية عند نقل الأقراص:

i. نقل قرص واحد فقط في كل مرة.

ii. عدم وضع القرص الأكبر فوق الأصغر.

iii. عند نقل قرص واحد من العمود للأخر تحسب حركة واحدة.

كم أقل عدد من الحركات التي يجب أن يقومو بها لنقل 64 قرصا ذهبيا وفقا للشروط المذكورة ؟

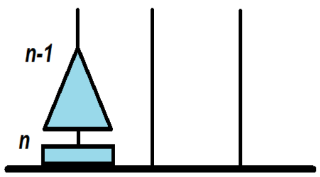
سنستخدم معادلات الفروق لحساب أقل عدد من الحركات لنقل الأقراص.

لنفرض أن n يرمز لعدد الأقراص و $T(n)$ يرمز لأقل عدد من الحركات لنقل n من الأقراص.

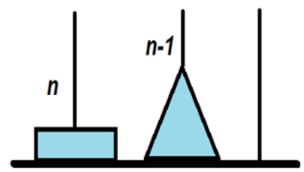
مع ملاحظة أن عند نقل الأقراص بأقل عدد من الحركات لا يشترط أن يمر كل قرص على كل عمود.

الأشكال التالية توضح مراحل نقل الأقراص من العمود الأول إلي الأخير بأقل عدد من الحركات وكيفية استنتاج معادلة الحل المطلوبة لحساب $T(n)$.

شكل 1

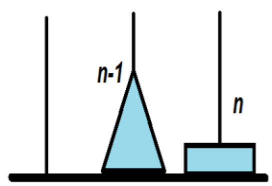


شكل 2



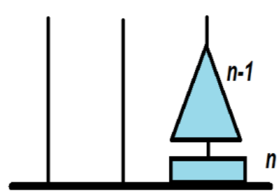
T(n)=T(n-1)

شكل 3



T(n)=T(n-1)+1

شكل 4



T(n)=T(n-1)+1+T(n-1)

إذا لدينا معادلات الفروق التالية:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

وبالتالي

$$T(n+1) = 2T(n) + 1 \qquad \rightarrow (1)$$

$$\therefore T(n+1) - 2T(n) = 1 \qquad \rightarrow (2)$$

المعادلة (1) هي معادلة فروق خطية وغير متجانسة فيها $p(n) = 2, r(n) = 1$، مع الشرط الابتدائي

$T(n) = 0$.

سيكون حل المعادلة (2) علي الشكل الأتي :

$$T(n) = g(n)(\sum \frac{r(n)}{Eg(n)} + C \qquad \rightarrow (3)$$

إذا لنكون أولا المعادلة التالية

$$T(n+1) - 2T(n) = 0 \qquad , n \in \mathbb{N}$$

وهي المعادلة المتجانسة المرافقة للمعادلة (2)، ويمكن حلها بالطريقة التكرارية كالأتي :

لنفرض أن $g(n)$ هو حل المعادلة المتجانسة و سيكون كالتالي :

$$g(n) = \prod_{k=1}^{n-1} p(n) = 2^{n-1}$$

إذن

$$g(n) = 2^n$$

حيث الثابت $\frac{1}{2}$ أهمل.

الأن نحسب المعادلة (3) وذلك بالتعويض عن كلا من $g(n), Eg(n), r(n)$ فنحصل علي أن

$$T(n) = 2^n \left(\sum \frac{1}{2^{n+1}} + C\right)$$

$$= 2^n \sum \frac{1}{2^{n+1}} + (2^n)C$$

$$= \left(\frac{2^n}{2}\right)(-2)\left(\frac{1}{2^n}\right) + (2^n)C$$

$$\therefore T(n) = -1 + (2^n)\, C$$

بما أن

$$T(n) = 0$$

$$\therefore 0 = -1 + (2^0)C$$

$$\therefore C = 1$$

نستنتج أن أقل عدد من الحركات لنقل n من الأقراص هو

$$T(n) = 2^n - 1 \qquad \rightarrow (4)$$

الآن بالإستقراء الرياضي سنبين إن الصيغة التكرارية(1) لحل لغز هانوي هي مكافئة للصيغة المغلقة (4).

حيث

Recursive Formula $(\boldsymbol{RF})$: $\boldsymbol{T_0 = 0, T_n = 2T_{n-1} + 1\ , n > 0}$

Closed Formula (CF) : $T_n = 2^n - 1\ , n \geq 0$

سنثبت أن $\boldsymbol{RF} = \boldsymbol{CF}$، أي أن

$$T_n = T_n = 2^n - 1\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

عندما $n = 0$، لدينا

$$T_0 = 0$$

$$T_0 = 2^0 - 1 = 0$$

إذن

$$T_0 = T_0$$

وهذا يعني أن خطوة الأساس عندما $n = 0$ تكون صحيحة.

نفرض أن:

$$T_{n-1} = T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$$

صحيحة (فرضية الإستقراء).

وسنبين إن $T_n = T_n = 2^n - 1$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \text{ (من التعريف)}$$

$$= 2\,(2^{n-1} - 1) + 1 \quad \text{(من فرضية الإستقراء)}$$

$$= 2^n - 2 + 1$$

$$= 2^n - 1 = T_n$$

إذن حسب مبدأ الإستقراء الرياضي:

$T_n = T_n = 2^n - 1$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$.

الاستنتاج:

من خلال دراستي لهذا البحث نلاحظ أنه من البراهين المباشرة في إثبات صحة أي جملة معينة في نطاق المتقطع (الأعداد الطبيعية) مهما كان نوع الإستقراء المطبق عليها. واستنتجنا أيضا أنه يمكن استخدام الإستقراء الرياضي في أي نشاط في حياتنا اليومية .

جدول المصطلحات

BASIC STEP	خطوة الإستقراء
INDUCTION HYPOTHESIS	فرضية الأستقراء
VARIATIONS OF THE BASIC PRINCIPLE	بعض أنواع الاستقراء الرياضي
ARITHMETIC MEAN	الوسط الحسابي
GEOMETRIC MEAN	الوسط الهندسي

المصادر والمراجع:

1. كتاب أصول المنطق الرياضي للمؤلف (محمد ثابت الفندي).

2. BITTINGER, M. ETEL. (2013). COLLEGE ALGEBRA: GRAPHES END MODELS. (5TH ED) .PEARSON.

3. WASILEWSKA, A. DISCRETE MATHEMATICS. P.P. (25–30), ONLINE. WORLD WEB. RETRIEVED FORM HTTP: //WWW. CS. STONY BROOK. EEDU

4. SNAPP,R. (2012). TOWER OF HANOI. UNIVERSIDY OF VERMON . ONLINE. WORLD WEB. RETRIEVED FORM HTTP://www.cems.uvm. EDU/ R SNAPP/ TEACHING /C 32 / LECTURES HANOI. PDF.