

حساب البارامترات في تكامل شوارتز - كريستوفل: الحقول على شكل مدرج نموذجاً

احميد عثمان زيدان

قسم الرياضيات- كلية العلوم - جامعة سبها

Email: ahzaidan94@gmail.com

الملخص:

الهدف من هذه الورقة هو حل مسألة بناء التحويلات الحافظ للزوايا من نصف المستوى العلوي إلى داخل منطقة على شكل مدرج. بشكل خاص قمنا بدمج الطرق التحليلية والعديد لتعيين البارامترات المجهولة في تكامل شوارتز - كريستوفل. النتائج التي وصلنا إليها لثلاثة نماذج أظهرت دقة عالية في القيم المحسوبة.

تفاضلية، البارامترات المجهولة فيه تصبح متغيرات يتطلب حسابها عددياً وبالشروط الحدية المعطاة. هذا ما سنحاول دراسته في هذه الورقة من خلال نماذج معينة لهذا النوع من المناطق. في الدراستين المشار إليهما رأينا أن العمل لحل هذه المسألة يمر بعدة مراحل، نلخصها الأتي: في البداية يتم اختيار منطقة بسيطة يكون فيها التحويل معلوم، أي أن البارامترات تكون معلومة. ثم عن طريق القطع بخطوط مستقيمة أفقياً وعمودياً بالأطوال التي نحتاجها سنحصل على المنطقة (الحقل) موضوع الدراسة. هذه الطريقة تعتمد على تحويل لمنطقة ما معلوم، منه نحصل على تحويل مجهول لمنطقة أخرى ناتجة من المنطقة السابقة بقطع على طول خط مستقيم، وهذا التحويل الأخير الذي حصلنا عليه صار معلوماً، يكون بمثابة الأساس لإيجاد التحويل للمرحلة التالية، وهكذا حتى نحصل على التحويل المطلوب للمنطقة موضوع دراستنا. ثم من خلال النموذج التحليلي (الرياضي) لعدد من النماذج المختارة لمناطق على شكل مدرج، واختيار طريقة عددية مناسبة لحل نظم المعادلات التفاضلية لحساب البارامترات المجهولة في تكامل شوارتز - كريستوفل لكل مرحلة.

مقدمة: شهد النصف الثاني من القرن الماضي ظهور الكثير من التطبيقات الهندسية التي تتعامل مع المناطق على هيئة متعددات الزوايا (مضلعات) أنظر [3]، الأمر الذي أدى للحاجة إلى دراسة الدوال (التحويلات) لهذه المناطق، وعلى وجه الخصوص التحويلات التي تعمل على تحويل منطقة ما كنصف المستوى أو قرص إلى شكل متعدد الزوايا، وهذا تحدياً ما تدرسه نظريات التحويلات الحافظة للزوايا بشكلها العام، ونظرية شوارتز - كريستوفل على وجه الخصوص أنظر [3].

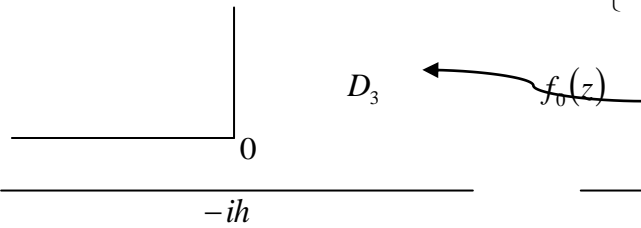
ولقد أجريت العديد من الدراسات الجادة في طرق بناء هذا النوع من التحويلات، انظر مثلاً [1]، [2]، [4]، [5]. والمشكلة تكمن كما هو معلوم في إيجاد البارامترات المجهولة في تحويل شوارتز - كريستوفل.

في دراسة سابقة [1]، قُدمت أفكار لبناء تحويل حافظ للزوايا من نصف المستوى العلوي إلى داخل حقل على شكل مضلع، وبشكل خاص في [2] الحقول على شكل مدرج. وفي كلتا الدراستين تم تحويل مسألة إيجاد البارامترات المجهولة في تكامل شوارتز - كريستوفل، إلى حل نظام معادلات

نرمز من خلال $f_n(z)$ ، $n=1,2,\dots$ تحويل من نصف المستوى العلوي إلى داخل الحقل على شكل مدرج D_{2n+3} ، فيه زاوية $2n+3$ ، ويحقق الشروط الحدية التالية

عندما $n=0$ ، التحويل $f_n(z)$ من نصف المستوى العلوي إلى D_3 ، وفقا إلى قاعدة تكامل شوارتز- كريستوفل ببساطة يكون على الصورة

$$f_0(z) = \frac{h}{\pi} \int_0^z \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}}{\zeta-1} d\zeta$$



على شكل مدرج D_{2n+3} ، بزوايا داخلية $\beta_k \pi$ ، عند الرؤوس $k=1,2n+2$ يكون على الصورة

$$f_n(z) = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^{2n} (1-a_k)^{-\mu_k} \int_0^z \prod_{k=1}^{2n+2} (\zeta-a_k)^{\mu_k} d\zeta$$

حيث $\mu_k = \beta_k - 1$ و $k=1, n$ ، $\mu_{2k} = \frac{-1}{2}$ ، $k=0, n$ ، $\mu_{2k+1} = \frac{1}{2}$ ، $a_{2n+1} = 0$ ، $a_{2n+2} = 1$ ،

هذا التحويل نجزه على مرحلتين (أنظر [2]) ، ونلخص ذلك كالآتي:

في المرحلة الأولى ندرس إيجاد التحويل $f_n(z, t)$ الذي يحول نصف المستوى العلوي إلى الحقل D_{2n+3} بقطع أفقي يتزايد بالبارمتر t ، $0 \leq t < T$ وبطول Q_{n+1} ، بدايةً من النقطة $A^* \neq A_k$ و $A^* = \sum_{k=0}^n Q_k + i \sum_{k=1}^{n+1} P_k$. يجب الإشارة هنا إنه نتيجة للقطع تظهر لدينا ثلاثة رؤوس إضافية للشكل المدرج عند هذه النقطة وهي

المشار إليه يكون على شكل مدرج بـ A_{2n+4} ، A_{2n+5} ، A_{2n+6} ، الحقل D_{2n+3} بالقطع $\lambda(T) \rightarrow A_{2n+6}$ ، $a_{-1}(T) \rightarrow A_{2n+5}$ ، $a_0(T) \rightarrow A_{2n+4}$ ، هندسياً تمثل أصل (سابق) نهاية الرأس

إيجاد هذه البارامترات التي تمثل أحد مكونات التحويلات الحافظ للزوايا لهذا النوع من المناطق ، نكون حصلنا على التحويل الحافظ للزوايا من نصف المستوى العلوي إلى داخل حقل على شكل مدرج.

من أجل $n=1,2,\dots$ عدد طبيعي مثبت ، لأي

أعداد موجبة Q_k ، P_k ، $k=0, n$ و $Q_0 = 0$.

نرمز من خلال Δ_k إلى نصف الشريط من المستوى المركب w :

$$\Delta_k = \left\{ w : \sum_{j=1}^{k-1} Q_j < \Re w < \sum_{j=1}^k Q_j , \Im w > \sum_{j=1}^k P_j \right\}$$

و الحقل D_3 الخاص

$$D_3 = \left\{ w : \left(-\pi < \arg w < \frac{\pi}{2} \right) \cap (\Im w > -h) \right\}$$

، إضافةً إلى ذلك $D_{2n+3} = D_3 \setminus \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$

المتحرك من القطع . هنا $\beta_0 = \frac{-1}{2}$, $\beta_{-1} = \frac{1}{2}$, و التحويل الموافق لهذه المرحلة يكون على الصورة والزاوية التي عند نهاية القطع تساوي 2π .

$$f_n(z, T) = c(T) \int_0^z (\zeta - \lambda(T)) \prod_{k=-1}^{2n+2} (\zeta - a_k(T))^{\mu_k} d\zeta ,$$

لتعيين البارامترات المجهولة عددياً، وفقاً للنظرية (1) لدينا نظام المعادلات التفاضلية العادية التالي

$$\begin{aligned} \frac{da_k(t)}{dt} &= - \frac{a_k(t)(a_k(t)-1)}{\lambda(t)-a_k(t)} , \quad k=-1, 0, \dots, 2n \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} &= (2\lambda(t)-1) + \lambda(t)(\lambda(t)-1) \sum_{k=-1}^{2n+1} \mu_k \frac{1}{\lambda(t)-a_k(t)} , \\ \frac{d \ln c(t)}{dt} &= - \frac{1}{2} , \end{aligned}$$

بالشروط الحدية $a_k(0) = a_k$, $k=1, 2, \dots, 2n+2$, $a_{-1}(0) = a_0(0) = \lambda(0) = \lambda_0$, $c(0) = c_0$

لحساب طول القطع في هذه المرحلة عند أي لحظة $t = T$ نستخدم العلاقة التالية:

$$|\Gamma(t)| = Q_{n+1} = \int_0^T c(t) \lambda(t)^{\frac{3}{2}} \prod_{k=-1}^{2n} (\lambda(t) - a_k(t))^{\mu_k} dt , \quad (1)$$

ولتدقيق الحسابات يمكن استخدامها العلاقة

$$a_k = a_k(0) , \quad \lambda(t) = 1 - e^{\frac{t}{2}} \prod_{k=1}^{2n} \left(\frac{1 - a_k(t)}{1 - a_k} \right)^{-\mu_k} \sqrt{(1 - a_{-1}(t))(1 - a_0(t))} \quad (2)$$

التحويل $f_n^*(z, t)$. $c_0 = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^{2n+3} (1 - a_k)^{-\mu_k}$

الذي يحول نصف المستوى العلوي إلى الحقل D_{2n+6}^* بقطع عمودي يتزايد بالبارامتر t ، $0 \leq t < \infty$ ، بدايةً من الرأس A^* ، هذا التحويل يكون على الصورة

في المرحلة الثانية لدينا التحويل $f_n(z, T)$ معلوم ،

منه يمكن إيجاد التحويل $f_n^*(z, t)$ الذي يحول نصف المستوى العلوي إلى الحقل D_{2n+6}^* ، صورته

العامة هي $f_n(z, T) = c_0 \int_0^z \prod_{k=1}^{2n+5} (\zeta - a_k)^{\mu_k} d\zeta$

حيث $\mu_2 = 2$, $a_{2n+5} = 0$, $a_{2n+5} = 1$ و

$$f_n^*(z, t) = c(t) \int_0^z (\zeta - \lambda(t)) \prod_{k=-1, k \neq 2}^{2n+5} (\zeta - a_k(t))^{\mu_k} d\zeta$$

$$\cdot \beta_{-1} = \frac{1}{2}, \beta_0 = \frac{3}{2} \text{ هنا}$$

من أجل تعيين البارامترات المجهولة في التحويل الموافق لهذه المرحلة ، لدينا نظام معادلات تفاضلية ،

$$\begin{aligned} \frac{da_k(t)}{dt} &= -\frac{a_k(t)(a_k(t)-1)}{\lambda(t)-a_k(t)}, \quad k=-1, 0, 1, 3, 4, \dots, 2n+3 \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} &= \lambda(t)(\lambda(t)-1) \sum_{k=-1, k \neq 2}^{2n+5} \mu_k \frac{1}{\lambda(t)-a_k(t)} + (2\lambda(t)-1), \\ \frac{d \ln c(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

مع الشروط الحدية

$$a_k(0) = a_k, \quad k = 1, 3, 4, \dots, 2n+3, \quad a_{-1}(0) = a_0(0) = \lambda(0) = a_2, \quad c(0) = c_0$$

لحساب طول القطع عند أي لحظة $t = T$ في هذه المرحلة نستخدم العلاقة التالية:

$$|\Gamma(t)| = P_{n+1} = \int_0^T \left| c(t) \lambda(t)^{\frac{3}{2}} \prod_{\substack{k=-1, \\ k \neq 2}}^{2n+3} (\lambda(t) - a_k(t))^{\mu_k} \right| dt, \quad (1')$$

والعلاقة

$$a_k = a_k(0), \quad \lambda(t) = 1 - e^{\frac{t}{2}} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq 2}}^{2n+3} \left(\frac{1-a_k(t)}{1-a_k} \right)^{-\mu_k} \sqrt{\frac{(1-a_{-1}(t))}{(1-a_0(t))}} (1-a_2) \quad (2')$$

يمكن استخدامها لتدقيق الحسابات والتحقق من النتائج. والتحويل الموافق لهذه المرحلة يكون على الصورة

$$f_n(z) = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1-a_k}{1-b_k} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z \prod_{k=1}^n \left(\frac{\xi - a_k}{\xi - b_k} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(\xi-1)} d\xi,$$

المختلفة بطريقة رونق - كونا من المرتبة الرابعة ، ولقد أعطت نتائج أظهرت دقة جيدة .

فيما يلي ثلاثة من النماذج المختارة والنتائج التي تحصلنا عليها ، مع مقارنة للقيم المحسوبة والمضبوطة من خلال العلاقات (1) ، (2) ، (1') ، (2') التي أشرنا إليها أعلاه كعلاقات للتحقق من النتائج .

لاحقاً سوف نقوم بتعيين البارامترات المجهولة عددياً ، مع بقاء فقط حساب تكاملات ناقصية في هذا التحويل .

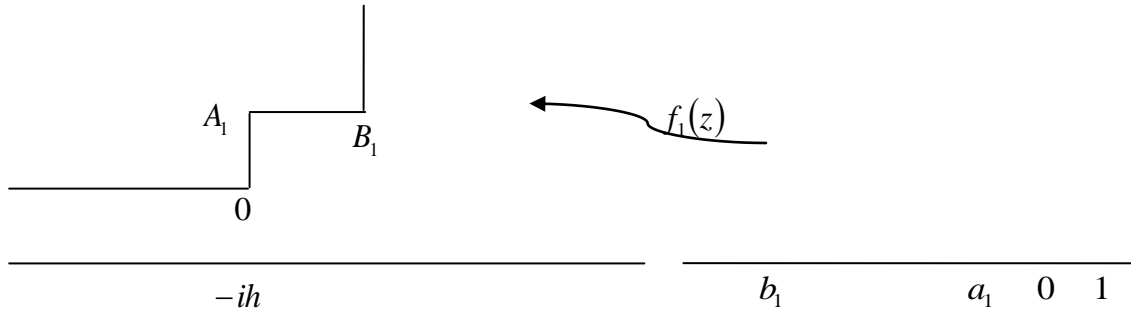
كما أشرنا أعلاه في الدراسات [1] ، [2] والمشار إليهما في قائمة المراجع ، أعطيت طريقة لحساب البارامترات a_k و b_k ، من خلال حل نظام معادلات تفاضلية حصلنا عليه ع مرحلتين .

تم استخدامنا برنامجاً حاسوبياً خاصاً لحل نظم المعادلات التفاضلية المشار إليها في المراحل

بدايةً لجميع الأمثلة سنفترض أن $P_0=1$ ، $Q_0=0$ و $k=\overline{1,n}$ ، $P_k=Q_k=h=1$

النموذج 1 : $n=1$ ، التحويل الحافظ للزوايا f_1 من نصف المستوى العلوي إلى داخل الحقل D_5 يكون على الصورة :

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1-a_1}{1-b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z \left(\frac{\xi-a_1}{\xi-b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(\xi-1)} d\xi ,$$



(1) ، (2) ، (1') ، (2') ولقد أعطت النتائج التالية:

$(\Delta f_1)_{0,a_1} = P_1^* = 0.99816$ ، $(\Delta f_1)_{a_1,b_1} = Q_1^* = 1.00050$ ،
والخطأ المطلق الموافق لقيم البارامترات التي
تحصلنا عليها هو

$$\Delta P_1 = |P_1 - P_1^*| = 0.00184 , \Delta Q_1 = |Q_1 - Q_1^*| = 0.0005$$

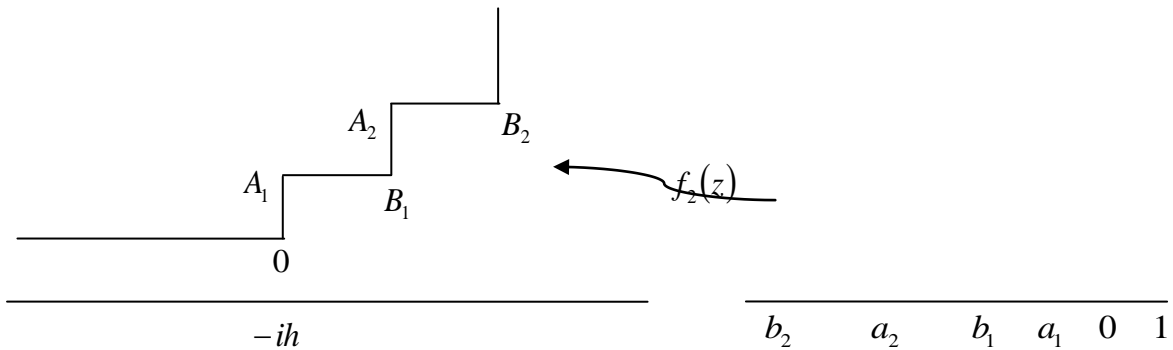
والحل العددي لمنظومة المعادلات التفاضلية
الموافقة لهذا التحويل أعطت القيم التالية للبارامترات
:

$$a_1 = -3.577149 , b_1 = -13.54135.$$

للتحقق من هذه القيم استخدمنا هذه النتائج في حساب
طول القطع مستخدمين المعادلات

النموذج 2 : $n=2$ ، التحويل الحافظ للزوايا f_2 من نصف المستوى العلوي إلى داخل الحقل D_7 يكون على الصورة :

$$f_2(z) = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^2 \left(\frac{1-a_k}{1-b_k} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z \prod_{k=1}^2 \left(\frac{\xi-a_k}{\xi-b_k} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(\xi-1)} d\xi$$



$$P_1^* = 0.9978 \quad , \quad Q_1^* = 0.9997,$$

$$P_2^* = 0.9971 \quad , \quad Q_2^* = 0.9988,$$

والخطأ المطلق الموافق لقيم البارامترات التي
تحصلنا عليها هو

$$\Delta P_1 = |P_1 - P_1^*| = 0.00225 \quad , \quad \Delta Q_1 = |Q_1 - Q_1^*| = 0.00030,$$

$$\Delta P_2 = |P_2 - P_2^*| = 0.0029 \quad , \quad \Delta Q_2 = |Q_2 - Q_2^*| = 0.0012$$

والحل العددي لمنظومة المعادلات التفاضلية الموافقة
لهذا التحويل أعطى القيم التالية للبارامترات:

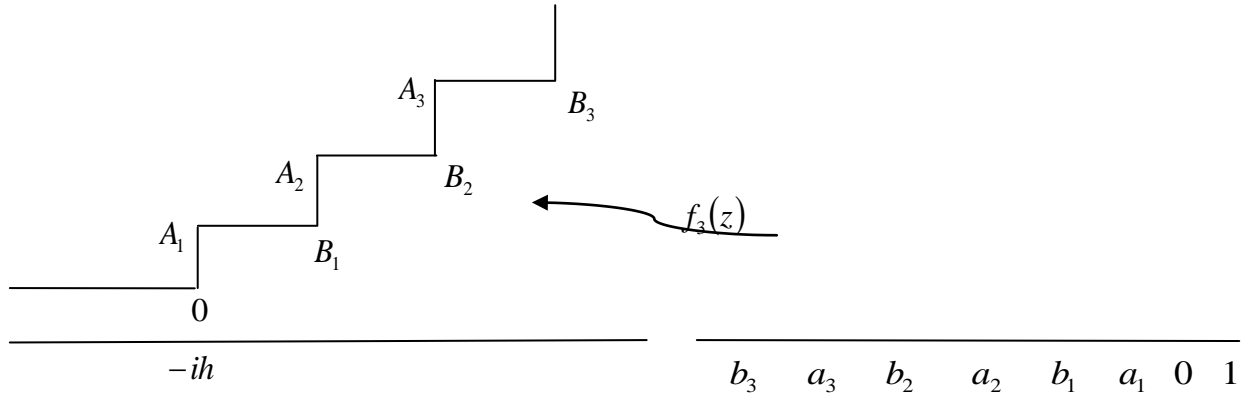
$$a_1 = -3.48500 \quad , \quad b_1 = -12.3532,$$

$$a_2 = -31.1507 \quad , \quad b_2 = -69.1764.$$

للتحقق من هذه القيم للبارامترات ومن خلال
التعويض في المعادلات (1) ، (2) ، (1') ، (2')
لحساب أطوال القطوع أعطت النتائج التالية:

النموذج 3 : $n = 3$ ، التحويل الحافظ للزوايا f_3 من نصف المستوى العلوي إلى داخل الحقل D_0 يكون على
الصورة :

$$f_n(z) = \frac{h}{\pi} \prod_{k=1}^3 \left(\frac{1-a_k}{1-b_k} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z \prod_{k=1}^3 \left(\frac{\xi-a_k}{\xi-b_k} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(\xi-1)} d\xi$$



هذه القيم للبارامترات ومن خلال التعويض في
المعادلات لحساب أطوال المشار إليها أعلاه أعطت

$$P_1^* = 1.0003 \quad , \quad Q_1^* = 1.0134,$$

$$P_2^* = 0.9735 \quad , \quad Q_2^* = 0.9860, \text{ النتائج التالية:}$$

$$P_3^* = 0.9873 \quad , \quad Q_3^* = 0.9892.$$

والحل العددي لمنظومة المعادلات التفاضلية الموافقة
لهذا التحويل أعطى القيم التالية للبارامترات:

$$a_1 = -3.66272 \quad , \quad b_1 = -12.1511,$$

$$a_2 = -29.8634 \quad , \quad b_2 = -62.2605,$$

$$a_3 = -118.054 \quad , \quad b_3 = -215.748.$$

والخطأ المطلق في حساب أطوال القطوع الموافق لقيم البارامترات التي تحصلنا عليها هو

$$\Delta P_1 = |P_1 - P_1^*| = 0.0007 , \quad \Delta Q_1 = |Q_1 - Q_1^*| = 0.0134 ,$$

$$\Delta P_2 = |P_2 - P_2^*| = 0.0265 , \quad \Delta Q_2 = |Q_2 - Q_2^*| = 0.0140$$

$$\Delta P_3 = |P_3 - P_3^*| = 0.0127 , \quad \Delta Q_3 = |Q_3 - Q_3^*| = 0.0108$$

3. أن القيم المتحصل عليها للبارامترات وعند تطبيقها في حساب أطوال القطوع أعطت خطأ مطلق يمكن قبوله بالتناسب مع مرتبة الطريقة العددية المستخدمة.

4. يمكن من خلال تطبيق هذا الأسلوب واختيار طريقة عددية مناسبة من مراتب أعلى لحل نظم المعادلات التفاضلية نحصل على نتائج مقبولة إلى حد كبير.

ويمكن تعميم هذه الطريقة لأي حقل على شكل مضلع (متعدد الزوايا) .

ملاحظات : 1. نلاحظ أن في النموذج الأول الشكل المدرج احتوى على عدد خمسة زوايا ، ثم تدرجنا في عدد الزوايا إلى سبعة زوايا في النموذج الثاني ، وتسعة زوايا في النموذج الثالث .

2. أن حل أنظمة المعادلات التفاضلية المتحصل عليها اتسم بالاستقرار ، كما نلاحظ أن قيم البارامترات المجهولة المتحصل عليها قد تميزت بالاستقرار وتنتج للاقتراب من قيمة محددة .

بهذا نكون قد قدمنا حل لمسألة بناء التحويلات الحافظة للزوايا من نصف المستوى العلوي إلى المناطق على شكل مدرج وبشروط حدية ، ولأي عدد من الزوايا ،

Calculation of parameters in the Schwarz – Christoffel integral: The step-shaped region as model.

Ahmaid Othman Zaidan

Math's Department, University of Sebha, Libya

Abstract: aim of this paper is to solve the problem of conformal mapping of upper half plane onto interior of a step-shaped region. In particular, both analytical and numerical methods are combined to determinate the unknown parameters in the Schwarz – Christoffel integral . The results of 3 examples , shown high degree of accuracy of the calculated values , should be noted.

References:

[1] Zaidan A. O., On a détermination of unknown paramètres in the Schwarz-Christoffel Transformation for Polygons, Journal of Sabha Uni. – Applied Sc., Vol. 11, N0. 1 (2013).

[2] Zaidan A. O., Conformal mappings of upper half plane onto interior the step - shaped regions , Journal of Academic Researches - Misurata.

[3] Schinzenger R. , Laura P. A. , Conformal mapping: methods and applications, Elsevier Sc. Pub. , Netherlands, 1991.

[4] Hopkins T. , Roberts D., Kufarev's method for determining the Schwartz -

Christoffel parameters , Numer. Math. 33 (1978) , 353 - 365.

[5] Trefethen L. N., Numerical computation of the Schwartz - Christoffel transformation , SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1 , No. 1 (1980), 82-102.