معادلات تفاضلية تؤول إلى الخطية

معادلات تفاضلية تؤول إلى الخطية

أولا : معادلة برنولي

تكون المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^{n}$$

حيث $n \neq 1, 0$ تسمى معادلة برنولي , n عدد حقيقي .

وهذه المعادلة يمكن أن تتحول إلى معادلة خطية :

-

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1}=Q(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- حلها العام هو

$$I(x)\, z = \int I(x)Q(x)\, dx + c$$

حيث أن : $z= y^{-n+1}$ ، $I(x) = e^{\int p(x)dx}$

مثال :

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$y'+xy=xy^2$

الحل:

المعادلة على شكل معادلة برنولي وهي بالصورة :

بمقارنة المعادلة (1) مع المعادلة (2) نجد أن

$P(x)=-2x \quad , \quad Q(x) = -x$

متفرقة

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$$

بضرب طرفي المعادلة في y^{-2} :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-2}xy = y^{-2}xy^2$$

تصبح بالشكل :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-2}xy = y^{-2}xy^2 \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1}x = x \text{ ....(1)}$$

ثم نضع:

$$z = y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

وبضرب المعادلة (1) في العدد 1- ثم نعوض عن y بدلالة z فيكون :

$$\frac{dz}{dy} - 2xz = -x$$

وهذه معادلة خطية من الصورة :

$$\frac{dz}{dy} - p(x)z = Q(x) \text{....................(2)}$$

$$\int P(x)dx = -x^2 \Rightarrow I(x) = e^{-x^2}$$

فيكون :

$$\int I(x)Q(x)dx = \int e^{-x^2}(-x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx = \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

∴ حل المعادلة يكون على الصورة :

$$I(x)z = \int I(x)Q(x)dx$$

أي أن :

$$e^{-x^2}Z = \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

وحيث ان :

$$z = y^{-1}$$

يكون :

$$e^{-x^2}y^{-1} = \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

ثانيا معادلة ريكاتي

وصورة هذه المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + Q(X)y + R(x) \text{..................................(1)}$$

حيث P , Q , R دوال في x فقط .
وممكن أن تصبح المعادلة السابقة خطية عندما : p(x)=0 , وممكن أن تصبح برنولية عندما R(x)=0.
وتعتبر هذه المعادلة أعم من معادلة برنولي .

حل المعادلة

لإيجاد حل مثل هذه المعادلة , لابد من علم حلا خاصا وليكن y_1 حيث $y_1=y_1(x)$.
ويكون الحل العام لمعادلة ريكاتي باستخدام التعويض :

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

ثم نقوم بالتعويض في المعادلة الأصلية ونوجد الحل الخاص للمعادلة ثم الحل العام .

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$y' + 2ye^x + y^2 = e^{2x} + e^x$,

حيث ان : $y= e^x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + e^x - 2ye^x - y^2$$

بتجميع الحدود المتشابهة نستنتج معادلة ريكاتي :

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + e^x - 2ye^x - y^2$$

- $y' = y^2 + e^x (1-2y) + e^{2x}$ ....(1)

- وهذه معادلة ريكاتي .

بما أن $y = e^x$ ، نفترض أن :

$$\therefore y = e^x + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

$$e^x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = (e^x + \frac{1}{z})^2 + e^x [1-2 (e^x + \frac{1}{z})] + e^{2x}$$

$$\Rightarrow - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = (e^x)^2 + 2e^x\frac{1}{z} + (\frac{1}{z})^2 + e^x [1- 2e^x - 2. \frac{1}{z})] + e^{2x} - e^x$$

$$\Rightarrow - \frac{dz}{dx} = z^2 e^{2x} + 2z^2 e^x\frac{1}{z} + z^2\frac{1}{z^2} + z^2e^x - 2z^2e^{2x} - 2 z^2 e^x. \frac{1}{z} + z^2 e^{2x} - z^2 e^x$$

وبتجميع الحدود المتشابهة نجد أن :

$$-\frac{dz}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -1$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية حلها العام كالتالي :

$$-\int dz = \int dx + c \quad \Rightarrow \quad Z = x + c$$

بالتعويض عن قيمة z نجد أن :

$$\frac{1}{y-e^x} = x + c$$

ثالثا : المعادلات التفاضلية على الصورة

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + P(x) f(y) = Q(x) \quad ....(1)$$

حيث $Q(x)$, $p(x)$ دوال في المتغير x , و $f(y)$ دالة في المتغير y فقط و $f'(y)$ هو تفاضل الداله $f(y)$ بالنسبة إلى y .

ولحل هذا النوع من المعادلات فإننا نستخدم التعويض : $z= f(X)$

ومنها بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{dz}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} + p(x) z = Q(x) ....$$

حيث أن المعادلة السابقة معادلة خطية في z .

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة التالية :

وهذه معادلة تفاضلية خطية وحلها يكون هو :

$Z = x e^x - e^x + c$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$e^y = e^x(x - 1) + c$

$$e^x = x \quad e^y \frac{dy}{dx} +$$

الحل :

نأخذ التعويض $z = e^y$ ومنها بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} + z = x$$

حيث c ثابت اختياري .

المعادلات التفاضليه

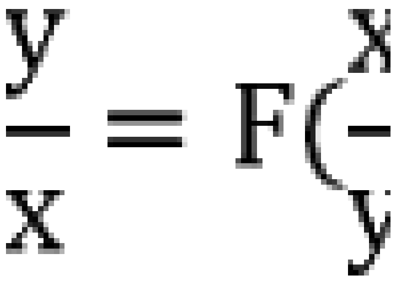
من نفس التصنيف

معادلات تفاضليه تؤول إلى تامه أوعامل التكامل I(x,y)

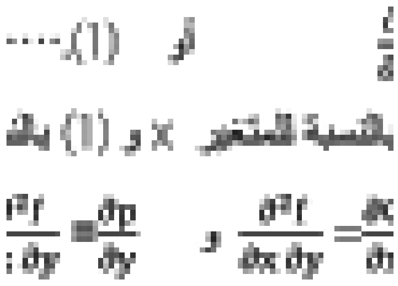
مقدمة ومفاهيم أساسية في المعادلات التفاضلية- الفصل الأول

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية الخطية



المعادلات التفاضلية المتجانسة



المعادلات التفاضلية التامة Differential Equations full

المعادلات التفاضلية

معادلات تفاضلية عادية تؤول إلى معادلات متجانسة

الموضوع التالي الموضوع السابق

إرسال تعليق