الملخص

في هذه البحث تمت دراسة احد أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وهو توزيع لوماكـــس، يعتبر توزيع لوماكس من التوزيعات المهمة التي تستخدم في العديد من المجالات منـــهـــا في دراسة الموارد المائية مثل دراسة الفيضانــــات، دراسة الظـــواهر الإرصاديـــة مثـــل دراسة درجات الحرارة الصغرى والعظمي. حيث تمت دراسة خواصه الاحتمالية وأيضا تم التطـــرق إلى بعض طرق التقدير بنقطة وهي طريقة الإمكان الأعظم ،وطريقة العـــــزوم وذلك لتقدير أحد معلمتي التوزيع وهي معلمة الشكل.

يهدف هذا البحث في جانبه النظري الى اشتقاق مقدر الإمكان الأعظم (Maximum Likelhood)، وكذلك مقدر العزوم (Moments) لمعلمة الشكل لتوزيع لوماكس ،وكذلك تم إجراء مقارنة بين هذين التقديرين وذلك باستخدام معيار المفاضلة متوسط مربعات الخطأ (MSE).

تم استخدام أسلوب المحاكاة (Simulation) وذلك من خـــلال افتراض بعض القيـــم الحقيقية للمعلمة، ومحاولة استخدام أحجام عينات مختلفة تمثلت في أحجـــام عينـــــات صغيـرة ،ومتوسطة، وكبيرة، وذلك لتحديد كفاءة هذه الطرق المستخدمة ؛لغـــــرض المفاضلة بين هاتين الطريقتين للتوصل إلى أفضل طريقة تقدير معلمة الشكل هذا التوزيع وأفضل مدى لعيـنة العشوائية المختارة. من خلال النتائج المتحصل عليـــها وجدنا أن طـريقة الإمــكان الأعـظـــم (Maximum Likelhood) أعطت تقـــديرات ذات صفات جيدة مقارنة بطريقة العزوم (Moment) من خلال زيادة حجم العينة.

الفصل الاول

1-1 المقدمة introduction

نظرا للصعــوبات التي تواجه الباحــثين في الحصول على بيانات المجتــمع كـكل واللجوء إلى أسلوب العينة في جمع البيانات,حيث إن العينة هي عـبارة عن جـزء من المجتمـع فإن ســمات العــينة سوف تـختلف بصفة عامة عن المجتمع ،وغالـبا مايكون السؤال المطروح هو ماذا يمكن القول عن خواص المجتمع بمـعلـومية خـواص العينة ؟ بالرغم من أن الإجابــة لهذا السـؤال من الممكــن ألا تكون مـتوفرة في جميع الحالات ، ولكــن من الممكن إيجاد إجابة في حـالة المعاينـة العشوائية وذلك بمساعدة نظرية الاحتمال, حيث أصـبحت أســاليب الاســتدلال الإحصـائي هـــي الوسيلة لاتخاذ القرارات الإحصائية بل وأصـبح الإحصاء الوصفي – الفـــرع الأول من فـروع علم الإحصاء – هو مرحلة من مراحل البحـث الإحـصائي التــي يتم على أساسها تحديد أسلـوب الاستدلال الإحصائي المناسب الذي يمثل الهــدف الأساسي من دراسة علم الإحصاء .

3-1 مشكلة البحث : تكمن مـشكلة البحث الأساســـية في بيان كـيفية استخـدام برنامـج (R) عند التعامل مع توزيع لوماكس في التطبيقات العملية ،وتحديد أفضل طريقة تقدير بين الطريقتين المستخدمة في تقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكــس .

4-1 أهمية البحث :تكمن الأهمية لهذا البحث في التعرف على بعض طـــــرق التقدير ؛لتقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس باستعمال طرق مختلفــة .حيث تناول هذا البحث طريقة العزوم وطريقة الإمكان الأعظم باستعمال أسلوب المحاكـــاة ؛لتوليد بيانات عشـــوائية بالاعتماد على أحجــــام عينات مختلفة وبتكرار ثابت (N=1000).

5-1 أهداف البحث : نــهدف من خلال هذا البحث إلى تقـدير معلمة الشكـل لتوزيــع لـــوماكـس (Lomax)ذو معلمتين $(\propto, \beta)$ باستخدام طريقة العزوم ، والإمــكان الأعظم ،والمقارنـة بــينها من حيث جودة المقـــدر،نعلم أن مقـــدرات الإمكان الأعـظم لها نفس سلوك المقـدرات عند ثبوت حجــم العــينة.

6-1 أقسام البحث: تم تقسيم هذا البحث إلى خمسة فصول:

الفصل الأول: يتضــمن مشـــكلة البحث، أهميته، وأهدافه ، وأقسام محتويات البحث .

الفصل الثاني: يتـــضمن مقدمـة عن توزيع لـوماكـــــس ،وأهم اســتــــخداماتـــه وخـواصه الرياضية المختلفة .

الفصل الثالث: الجانب النظري لطرق التقدير المختارة.

الفصل الرابع : يحتوي على الجانب العملي لمقارنة أفضل الطرق لتقدير معلمة الشكل الذي تناولتها هذه الدراسة لبيان أفضلها .

الفصل الخامس: هو ملخص لأهم النتائج التي تم التوصل إليها.

الفصل التانـي

2-1 المقدمة:

هذا الفصل يـقدم بعضا من المفـــاهيم الأساسية التي سوف تواجهنا في البحــــث، وعرضا بسيـطا عن توزيع باريتـــو ،ونبـذة تـاريخية عــنه باعــتبار أن تـــوزيــع لومـــاكس هو تــــوزيع باريتـو النوع الثاني عنـــدما ($\mu=0$) ،وبعــض من خصائصه.

بعض المفاهيم الأساسية:

2-2 الاستدلال الإحصائي statistical inference :

إذا كانت هنـــاك ظاهـرة معـينـة ولتــكن(X) فإن مفرداتـــها ($(x_1,\ldots,x_N)$ تكوّن مجتمــعا يكـــون له توزيع احــتمالـــي ،وليكن $f(x,\theta)$ يعتـــمد على بـــعض المعالــم (يمكن أن تكون معلمة واحدة أو عــدة معالم) هـــذه الـمعـــالم غـــالـــبا ما تكـــون مجــهولة ونرغب في عـمل بعــض الاســتدلال الإحصائي حـولهــا كــأن نــقوم بتــقديرها أو اختـــبار فرض معين حولها ،من أجل ذلـــك نختار عينة عشوائية بـــاستـــخدام أساليــب اختيار الـــعينات و لتكن $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_N)$ من بيانات المجتمع وعادة مانقوم بتـنظيم وتصـنيف بيانات العينة وحســـاب بعض المقاييس المتعلقة بها.

2-2-1 الهدف من الاستدلال الإحصائي :

الهــدف مــن الاســتــدلال الإحــصـــائي هــو اســتـــنـــتـاج خصـــائــــص الـــمجتــمع مــن خـــصائــص العــينـــة التي ســحـبـــت منه , فــعند استـــخدام بيـــانات الـعينة (statistic) للاستدلال عن المجتمع ولكونـنا لانـملك كل حقـائـــق الـمـــجتمع، فـــنبحــث عـلى طـريقـة عــملية نـســتطيع مــن خلالــها الوثوق بالحـــقيــقة المطلوبة ضمن نطاق معـــين معتمــدين على طبيعة المـــجتمع المطلوب تقدير مـــعاملاته(parameter) محـــاولين الوصــــول لقـيــم (عددية) لمعالم المـجتمع من خلال بيانات العينة المســحوبة منه عشوائيا .

2-2-2 من التعريفات الهامة التي يقوم عليها الاستدلال الإحصائي هي:

1- **الـــمعلمة** (parameter) : هي عــبارة عن خاصية أو مقياس يتــم حـــــسابها من المجتمع محل الدراسة وهي كمية ثابتة .مثلا نسبة البطالة في ليبيا , متوسط العمر الافتراضي لجهاز معين .

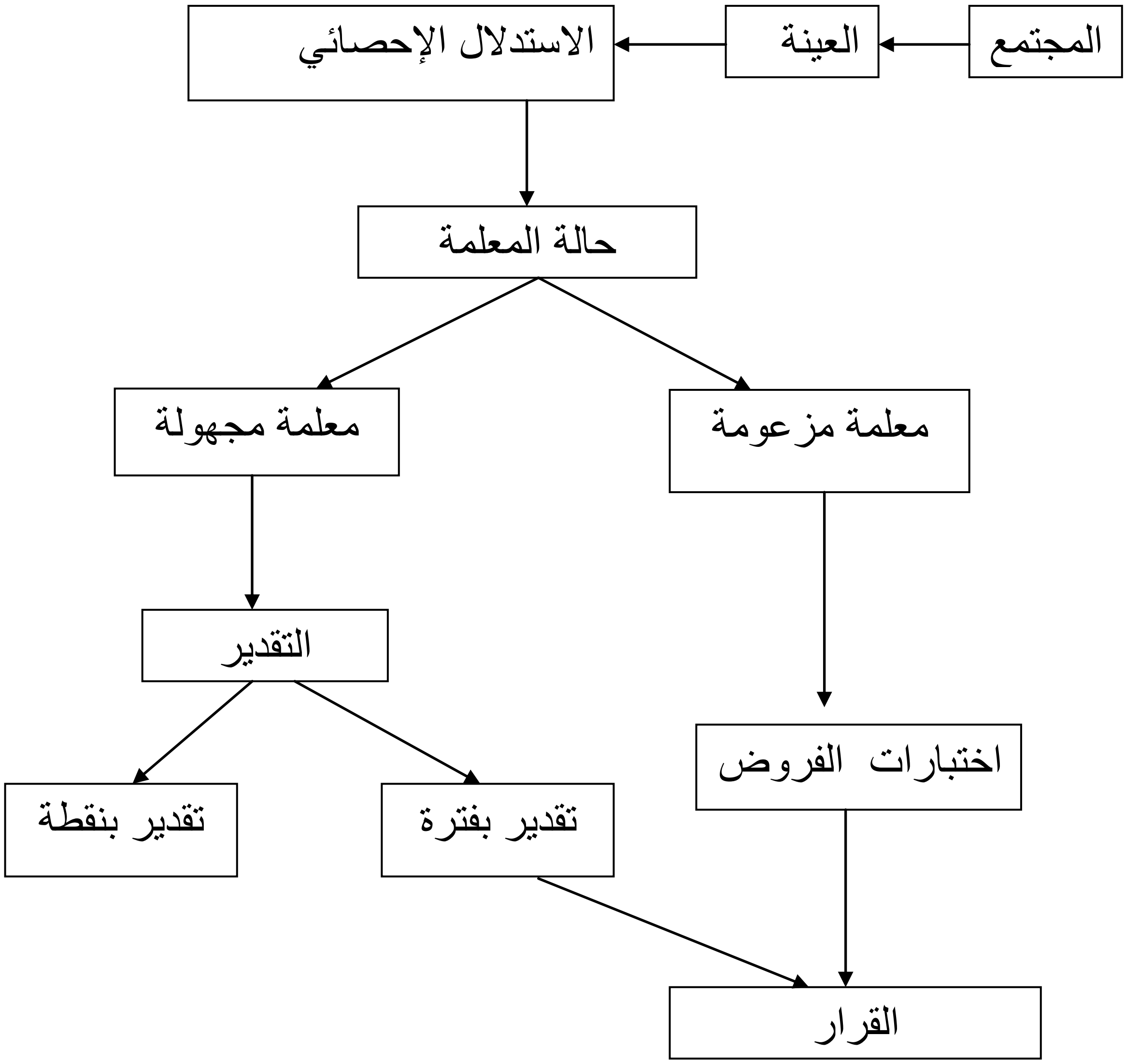
2- **الإحصاءة** (statistic): هي عــبارة عن خاصية أو مقـياس يتم حسابها من العيـــنة المـــسحوبة من المـــجتمع محــل الدراسة ،أي أن الإحصاءة هي دالة من بـــيانات العيـــنة .

2-2-3 وينقسم الاستدلال الإحصائي إلى موضوعين رئيسين :

أ- **تقدير معالم المجتمع** (Estimation).

ب- **اختبارات الفروض بشأن صحة قيم معالم المجتمع** (Testing of hypotheseos).

ويــتم ذلك عــن طريق ســحب عينة أو عينات من المجتمع أو المجتمعات المراد تقدير معــالمها أو إجراء اختبار الفروض بشأنها , كما يتضح من نموذج الاستدلال الإحصائي التالي :



الشكل رقم (2-1)نموذج الاستدلال الإحصائي

يستخدم أسلوب التقدير لتقدير معالم المجتمع إذا كان الهدف هو تحــديد قيمة معلمــة مجهولة(Unknown parameters) ، أما اختبارات الفــروض فتستــخدم بهدف الوصول إلى قرار بشأن رفض أو عـــدم رفض فرضية إحــصائية عــن مــعلمة مزعومة (Hypothesized parameter).

2-3 تقدير معالم المجتمع.

التقدير هو أسلوب إحصائي مبني على نظريات إحصائية يستخدم لتقدير معلمة ما محل الدراسة عن طريق استخدام مقاييس العينة .

2-3-1 هناك أسلوبان لتقدير معلمة المجتمع المجهولة وهما :

أ- التقدير بنقطة (point Estimation): يستخدم بيانات العينة لتقدير معالم المجتمع بنقطة واحدة ,أي بقيمة واحدة فقط .

مثلا : قيمة الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري باعتبارهما تقديرا لمعلمة المجتمع ،وأهم الطرق للحصول على التقدير هو مقدر الإمكان الأكبر وطريقة العزوم بالإضافة الى طرق أخرى كما أن تباين العينة S^2 أو انحرافها المعياري يعرفنا تباين المجتمع σ^2 , $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ والخطأ المعياري يقدر بالإحصاءة $(S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}})$.

ب- التقدير بفترة (Interval Estimator): تستخدم بيانات العينة لتقدير معلمة المجهولة بفترة من القيم .ولاستخدام البيانات بكفاءة فلابد من التعرف على خصائص مقدر النقطة الجيد وهي:

1- عدم التحيز (Unbiasedness)

2- الكفاءة (Efficiency)

3- التوافق أو الاتساق (Consistency)

4- الكفاية (Sufficiency)

2-4متوسط مربعات الخطأ mean square error(MSE) :

إذا كانت $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع توزيعه الاحتمالي $f\ (x, \theta)$ يعتمد على المعلمة θ وإذا أخذنا t=Ø(x) كتقدير للمعلمة (θ) يمكن أن يقاس بالمقدار $(t - \theta)$ ولكن هذا المقدار يمكن أن يكون موجبا أو سالبا حسب قيمة t المحسوبة من العينة وحتى نتخلص من الإشارة نأخذ مربع المقدار $(t-\theta)^2$كمقياس لقرب المقدار من المعلمة وحيث أن المقدار يتغير من عينة لأخرى لذلك نأخذ القيمة المتوقعة له أي $E(t-\theta)^2$ والتي تسمى متوسط مربعات الخطأ التقدير t ويرمز له بالرمز

$MSE(t)$ أي $MSE(t) = E(t-\theta)^2$ كمقياس لجودة المقدار للمعلمة (θ) ،لـــذلك نفضل التقدير الذي له أقل متوسط مربع خطأ, فإذا كـــان t_1, t_2 مقدرات للمعلمة (θ)فإننا نفضل (t_1) عن (t_2) إذا كــان $MSE(t_1) < MSE(t_2)$ نادرا مانجد مقدرا له أقل متوسط مربع خطأ لجميع قيم(θ)

5-2تعريف المحاكاة:

المحاكاة هي تقليد أو تمثيل لعمل نظام حقيقي على فترة زمـــنية معينة.وسواء أجــرينا المحاكاة يدويا أو باستخدام الحاسب فإنها تشتمل على تـــوليد تاريخ مصــــطنع للنظام، وذلك لــغـرض استنتاج الخواص التشغيلية للنظام الحقيقي. وقبـــل الدخول في تــــطبيق أسلوب المحاكاة التـــي سيتم تنفيذها من المفيد أن نعرض بعض مميزات وعيوب المحاكاة.

مزايا المحاكاة : من أهم مزايا أسلوب المحاكاة :

1- تختصر وقت تنفيذ العملي التي تحتاج إلى فترات زمنية طويلة إلى بضع دقائق في الحاسب الآلي.

2- إمكانية السيطرة على التجربة وذلك بتغيير المعالم لاختبار سلوك الظاهرة تحت شروط الواقع .

عيوب المحاكاة : من أهم عيوب أسلوب المحاكاة :

1- صعوبة تحديد القيم الأولية لمعلمات النموذج.

2- الفرضيات قد تجعل النموذج يتشعب ويبتعد عن الحقيقة.

معلمة الشكل :هي القيمة العددية التي تساعد في تحديد شكل التوزيع فإذا كانــت($0 < \alpha$) يعني التوزيع ملتوياً ناحية اليمين أما إذا كانت($0 > \alpha$) فإن التوزيع ملتو ناحــــــية اليسار أما إذا كانت($\alpha = 0$)فإن التــــــوزيع متماثل.

معلمة القياس : هي قيمة عددية تساعد في تحديد شكل منحنى الدالة إما أن يكون مذبباً أو مفرطحاً .

6-2 توزيع باريتو: هو عبارة عن النموذج الاحتمالي للمتغيرات المستمرة , ويستخدم في وصف توزيع دخول ،ووصف السلوك المتطرف لقيم الخسارة في المجال الاقتصادي ويضم توزيع باريتو معلمتين هما :

1- معلمة القياس (β : Scale Parameter) .

2- معلمة الشكل (α :Shape parameter) ،وتعرف (α) بأنها ثابت باريتو أو معلمة الشكل .هو من توزيعات احتمالية المستمر يرجع تسميته بهذا الاسم إلى العالم الإيطالي فيلفريدو باريتو (Vilfredo pareto). واسمه الكامل هو ولفريد فريتز باريتو ,وهو عالم اقتصادي واجتماعي شهير ولد في مدينة باريس الفرنسية يوم 15 / يوليو /1848م وتوفي في مدينة جنيف السويسرية في 19/ مارس /1923م حيث وضع أساس هذا التوزيع في علم الاقتصاد من خلال دراسة توزيع الدخول (Incomes) وهو صاحب مبدأ باريتو المعروف بقاعدة 80-20 في علم الإدارة ,وهو أيضا صاحب النظريتين الاقتصاديتين أمثلية باريتو وأفضلية باريتو ،وله مدرج إحصائي عرف باسم مخطط باريتو وكذلك توزيع باريتو الاحتمالي

ينقسم توزيع باريتو الى أربعة أنواع :

1- توزيع باريتو النوع الأول (I)

جدول رقم (2-1)

شكل الدالة $F(X)$	التوقع الرياضي E(X)	حدودالمتغير(X)	عدد المعالم	حدود المعالم
$1-\left[\frac{x}{\beta}\right]^{-\alpha}$	$\frac{\beta\alpha}{\alpha-1}, \alpha \succ 1$	$X \succ \beta$	2	$\beta > 0, \alpha > 1$

2- توزيع باريتو النوع الثاني (II)

جدول رقم (2-2)

شكل الدالة $F(X)$	التوقع الرياضي E(X)	حدودالمتغير(X)	عدد المعالم	حدود المعالم
$1-\left[1+\frac{x-\mu}{\beta}\right]^{-\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha-1}, \alpha \succ 1$	$X \succ \mu$	3	$\mu \in \mathbb{R}, \beta > 0, \alpha > 1$

ملاحظة: عند الشكل باريتو النوع الثاني (II) عندما $(\mu = 0)$ فإننا نحصل على توزيع لوماكس الذي ستتم دراسته بشيء من التفصيل في الفصل اللاحق.

توزيع لوماكس :

جدول رقم (2-3)

شكل الدالة $F(X)$	التوقع الرياضي E(x)	حدود المتغير(x)	عدد المعالم	حدود المعالم
$1-\left[1+\frac{x}{\beta}\right]^{-\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha-1}, \alpha \succ 1$	$X \geq 0$	2	$\alpha > 1, \beta > 0$

3- توزيع باريتو النوع الثالث (III):

جدول رقم (2-4)

شكل الدالة $F(X)$	التوقع الرياضي E(x)	حدود المتغير(x)	عدد المعالم	حدود المعالم
$1-\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-1}$	$\beta\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma+1), -1<\gamma<1$	$X \geq \mu$	3	$\mu \in \mathbb{R}, \gamma, \beta \succ 0$

4- توزيع باريتو النوع الرابع(IV)

جدول رقم (2-5)

شكل الدالة $F(X)$	التوقع الرياضي E(x)	حدود المتغير(x)	عدد المعالم	حدود المعالم
$1-\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-\alpha}$	$\frac{\beta\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\alpha}, -1<\gamma<\alpha$	$X \geq \mu$	4	$\mu \in \mathbb{R}, \gamma, \beta \succ 0, \alpha > 1$

7-2توزيع لوماكس : يعتبر توزيع **لوماكس** (Lomax) والذي يسمى أيضا بتوزيع باريتو من النوع الثاني وهو حالة خاصة من توزيع باريتو النوع الثاني عندما (μ=0) وقد استخدم توزيع لوماكس في العديد من الدراسات في عدد من المجالات فعلى سبيل المثال قد تم استخدامه على نطاق واسع لوضع نماذج أوقات الفشل، واختبار الحياة كما تم استخدامه في الدراسات ذات العلاقة بالاقتصاد ،وكذلك الدراسات المتعلقة بحجم المدن وأيضا تم استخدامه كبديل للتوزيع الأسي عندما تكون البيانات ذات التواء نحو اليمين (التواء موجب).

توزيع لوماكس له تطبيقات في مجال النظرية الاقتصادية وكذلك في مشـــاكل نـــظرية الطوابير

وفي تحليل البيانات المتعلقة بالإحصاءات الحيوية ,واستعمال تقدير بيز لإيجاد حــدود بيز للتنبؤ بعينة من الإحصاءات المرتبة لعينات من توزيع لوماكس (Lomax) , كــما درس تقدير معلمة قوة الإجهاد على افتراض أن مــعلمة القياس ثابتة ,واستعمل مقــدرات الإمكان الأعظم للحصول على المعالم المجــهولة بالإضافة الى مــقدرات بيز ،وفترة الثقة لدالة المعولية عندما تكون معلمة القياس ثابتة .

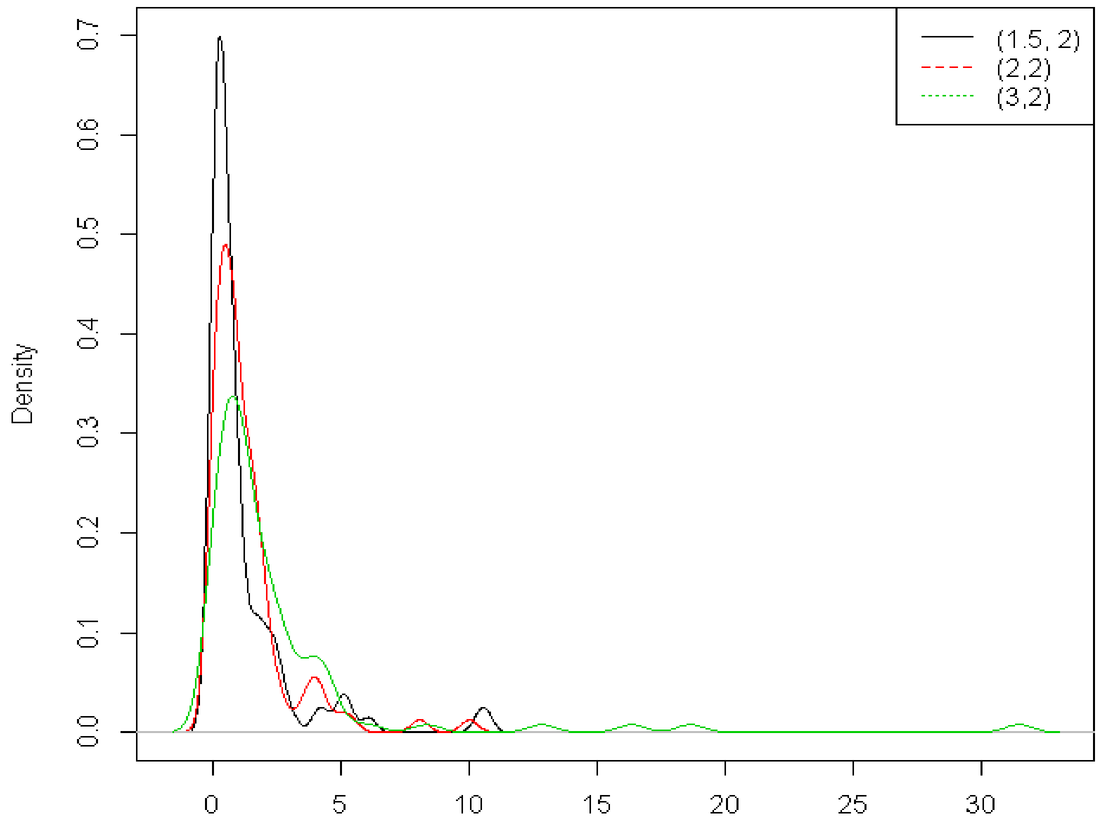
7-2-1 دالة كثافة التوزيع: يقال أن X متغير عشوائي يتبع توزيع Lomax بالمعلمــتين (α,β) ويرمز له بالــرمز $X \sim L(\alpha,\beta)$ إذا كانت دالة الكــثافة الاحتمالية (pdf) معرفة بالصـــورة العــامة لتوزيع لوماكس**.**

$$f\ (x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)},\quad x>0,\ \ \alpha,\beta>0$$

حيث أن (α) تمثل معلمة الشكل وأن(β) تمثل معلمة القياس ,وعندما تكون قيمة معلمة القياس (β) تساوي واحد فنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس بالنسبة لمعلمة الشكل α

$$f\ (x,\alpha)=\alpha(1+x)^{-(\alpha+1)},\quad x>0,\ \ \alpha>0$$

الشكل التالي يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس عند تثبيت قيمة معلمة القياس β وتغير معلمة الشكل α $\beta=2,\alpha=1.5,2,3$



الشكل (2-2)

اشتقاق بعض خواص توزيع لوماكس:

1- الدالة التوزيعية:

$$F(X)=\int_0^X f(t).dt$$

$$F(X)=\int_0^X \frac{\alpha}{\beta}\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-(\alpha+1)}.dt$$

$$F(X)=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^X \left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-(\alpha+1)}.dt$$

$$F(X)=\frac{\frac{\alpha}{\beta}\left[\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-(\alpha+1)+1}\right]_0^X}{(-(\alpha+1))(\frac{1}{\beta})}$$

$$F(X)=\frac{\frac{\alpha}{\beta}\left[\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-\alpha}\right]_0^X}{(\frac{-\alpha}{\beta})}$$

$$F(X)=-\left[\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-\alpha}-\left[1+\frac{0}{\beta}\right]^{-\alpha}\right]$$

$$F(X)=-\left[\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-\alpha}-[1]^{-\alpha}\right]$$

$$F(X)=1-\left[1+\frac{t}{\beta}\right]^{-\alpha}$$

2- الوسط الحسابي لتوزيع لوماكس:

$$E(X)=\int_0^\infty X\ .\frac{\alpha}{\beta}(1+\frac{X}{\beta})^{-(\alpha+1)}dx$$

من دارستنا سابقا نعلم ان توزيع بيتا النوع الثاني يساوي :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{\Gamma\alpha+\beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta}X^{\alpha-1}(1+X)^{-(\alpha+\beta)}dx$$

إن ناتج تكامل هذا المقدار

$$\int_{0}^{\infty} X^{\alpha-1}(1+X)^{-(\alpha+\beta)}dx = \frac{\Gamma\alpha\Gamma\beta}{\Gamma\alpha+\beta}$$

لأن

$$B(\alpha,\beta) = \int_{0}^{\infty} \frac{\Gamma\alpha+\beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta} X^{\alpha-1}(1+X)^{-(\alpha+\beta)}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma\alpha+\beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta}\int_{0}^{\infty} X^{\alpha-1}(1+X)^{-(\alpha+\beta)}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma\alpha+\beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta}\cdot\frac{\Gamma\alpha\Gamma\beta}{\Gamma\alpha+\beta}$$

$$B(\alpha,\beta) = 1$$

إذا بالاستفادة من هذه لمعلومات نجد إن :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}\int_{0}^{\infty} X\,(1+\frac{X}{\beta})^{-(\alpha+1)}dx$$

$$E(X) = \alpha\int_{0}^{\infty} (\frac{X}{\beta})^{(2-1)}(1+\frac{X}{\beta})^{-(\alpha+1)}dx$$

$$E(X)=(\alpha\beta)B(\alpha=2,\beta=1=(\alpha-1))=(\alpha\beta)\frac{\Gamma 2\Gamma\alpha-1}{\Gamma\alpha+1}$$

$$E(X)=\alpha\beta\frac{(2-1)!\Gamma\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)\Gamma\alpha-1}$$

$$E(X)=\frac{(1)\alpha\beta}{\alpha(\alpha-1)}$$

$$E(X)=\frac{\beta}{\alpha-1}$$

3- تباين التوزيع لوماكس:

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

نعلم أن العزوم المركزية تساوي :

$$\because E(X^K)=\frac{\alpha\beta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

إذا

$$E(x^2)=\frac{\alpha\beta^2\Gamma(2+1)\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$V(x)=\frac{\alpha\beta^{2}(2)\Gamma\left(\alpha-2\right)}{\alpha\left(\alpha-1\right)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)}-\frac{\beta^{2}}{(\alpha-1)^{2}}$$

$$V(x)=\frac{\beta^{2}(2)}{\left(\alpha-1\right)(\alpha-2)}-\frac{\beta^{2}}{(\alpha-1)^{2}}$$

$$V(X)=\frac{2\beta^{2}(\alpha-1)-\beta^{2}(\alpha-2)}{(\alpha-1)^{2}(\alpha-2)}$$

$$V(X)=\frac{2\beta^{2}\alpha-2\beta^{2}-\beta^{2}\alpha+2\beta^{2}}{(\alpha-1)^{2}(\alpha-2)}$$

$$V(X)=\frac{2\beta^{2}\alpha-\beta^{2}\alpha}{(\alpha-1)^{2}(\alpha-2)}$$

$$V(X)=\frac{\beta^{2}\alpha}{(\alpha-1)^{2}(\alpha-2)}$$

3- المنوال :

$$\ln\ f\left(\alpha,\beta\,|\,\underline{X}\right)=\ln(\alpha\beta)-(\alpha+1)\ln\left(1+\beta x\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-(\alpha+1)}{\left(1+\frac{x}{\beta}\right)}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

للتحقق من قيمة المنوال نقوم بإيجاد المشتقة الثانية للدالة f(x) ونعوض عن قيمة المنوال (x=0) إذا كان لها نهاية عظمى أي

$$f''(x)<0$$

إذا قيمة (x) تمثل المنوال

$$f'(x)=f(x)\frac{-(\alpha+1)}{\left(1+\frac{x}{\beta}\right)}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$f'(x)=f(x)\frac{-(\alpha+1)}{\beta+x}$$

$$f''(x)=f(x).\left[\frac{(\beta+x)(0)-(-(\alpha+1))(1)}{(\beta+x)^2}\right]+\frac{-(\alpha+1)}{\beta+x}(f'(x))$$

$$f''(x)=f(x)(\frac{\alpha+1}{(\beta+x)^2})-\frac{(\alpha+1)}{\beta+x}(f'(x))$$

$$f''(x)=f(x)(\frac{\alpha+1}{(\beta+x)^2})-\frac{(\alpha+1)}{\beta+x}f(x)\frac{-(\alpha+1)}{\beta+x}$$

$$f''(x)=-f(x)\left[-\frac{\alpha+1}{(\beta+x)^2}-\frac{(\alpha+1)^2}{(\beta+x)^2}\right]$$

$$f''(x)=-f(x)\left[-\frac{\alpha+1}{(\beta+(0))^2}-\frac{(\alpha+1)^2}{(\beta+(0))^2}\right]$$

$$f''(x)=-f(x)\left[-\frac{\alpha+1}{(\beta)^2}-\frac{(\alpha+1)^2}{(\beta)^2}\right]$$

$$\because f''(x)<0$$

خواص	شكل الدالة	الرمز
دالة التوزيعية	$1-(1+\frac{x}{\beta})^{-\alpha},\ X>0$	$F(X;\alpha,\beta)$
التوقع الرياضي	$\frac{\beta}{\alpha-1},\alpha>1$	$E(X)$
الوسيط	$\beta(\sqrt[\alpha]{2}-1)$	$Median$
التباين	$\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)},\alpha>2$	$V(X)$
العزم المركزي	$\frac{\alpha\beta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha+1)},\ \alpha>k,\ k=1,2,...$	$E(x^k)$
التفرطح	$\frac{6(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha-2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)}$	
المنوال	0	**Mode**
الالتواء	$\frac{2(1+\alpha)}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}},\alpha>0$	S_k

جدول (2-6)

طريقة العزوم Method of Moments (MM):

تعتبر طريقة العزوم من الطرق الشائعة الاستخدام في مجال تقدير النقطة لمعالم المجتمع. في هذه الطريقة يتم إيجاد عزوم التوزيع الاحتمالي ومن ثم مساواتها بعزوم العينة المناظرة لها، وذلك بجعل معلمتي التوزيع دالتين من مشاهدات العينة وكما هو مبين أدناه:

نفرض وجود عينة عشوائية بحجم(n)لمجموعة من البيانات $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

بجعل معلمة التوزيع Lomax دالة (إحصاءة) من مشاهدات العينة. وبذلك مقدر العزم لمعلمة القياس (β) ، إن العزم من الرتبة k للمجتمع يكون وفق الصيغة $M_k = E(X^k)$ وإن العزم من الرتبة k للعينة يكون وفق الصيغة $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ وبمساواة العزمين للمجتمع والعينة نحصل على. وحيث أن المجتمع الإحصائي (التوزيع الاحتمالي) يحتوى على معلمتين ؛عليه فإن العزم الأول للمجتمع يساوي متوسط العينة والعزم الثاني للمجتمع يساوي تباين المجتمع مضافا إليه مربع متوسط المجتمع . أي أن $\mu = \frac{\beta}{\alpha - 1} = \bar{x}$

وبهذا يكون مقدر معلمة القياس:

$$\hat{\beta} = \bar{x}(\hat{\alpha} - 1)$$

وأن العزم الثاني للمجتمع يكون $M_2 = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ أي أن $M_2 = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} + \mu^2$ وبمساواته بالعزم الثاني للعينة $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ فيصبح لدينا $\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}^2}{(\hat{\alpha}-1)^2(\hat{\alpha}-2)} + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ، وللتبسيط نعوض بمتوسط العينة كتقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع فنحصل على $\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}^2}{(\hat{\alpha}-1)^2(\hat{\alpha}-2)} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2\right]$ وحيث أن الطرف الأيمن يمثل تباين العينة والذي يرمز له بالرمز (S^2) عليه فإن $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2 = s^2(\hat{\alpha}-1)^2(\hat{\alpha}-2)$ وبالتعويض عن قيمة $\hat{\alpha}$ نحصل على مقدر معلمة الشكل.

$$\hat{\alpha}\left(\bar{x}\left(\hat{\alpha}-1\right)\right)^2 = s^2\left(\hat{\alpha}-1\right)^2\left(\hat{\alpha}-2\right)$$

$$\hat{\alpha}\bar{x}^2 = s^2\left(\hat{\alpha}-2\right)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2s^2}{s^2-\bar{x}^2}$$

طريقة الإمكان الأعظم:

تعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرق المهمة والشائعة الاستخدام لأنها تحتوي على خصائص التقدير الجيد ويعرف التقدير المتحصل عليه بهذه الطريقة بأنه : التقدير الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى أكثر توضيحا. إن مفهوم تقدير الإمكان الأعظم بناء على عينة عشوائية بحجم (n) لمجموعة من البيانات $\underline{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ من التوزيع Lomax. فإن اللوغارتم لدالة الإمكان الأعظم تكون بالصورة:

$$L\left(\alpha,\beta \mid \underline{X}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} = \frac{(\alpha)^n}{\beta}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)}$$

$$\log\ L\left(\alpha,\beta \mid \underline{X}\right) = n\log\alpha - n\log\beta - \alpha\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\frac{x_i}{\beta}\right)$$

من خلال المشتقة الجزئية للدالة أعلاه بالنسبة للمعلمة (α) نحـــصل على المــعادلة أدناه والتي بحلها أي بمساواة المعادلة بصفر نحصل على مقدر الإمكان الأعظم.للمعلمة (α) .

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = 0$$

إذا مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمة (α)

$$\frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \log(1+\beta x_i) \overset{set}{=} 0$$

$$\frac{n}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \log(1+\beta x_i)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(1+\beta x_i)}$$

الفصل الثالث

المحاكاة :Simulation

في هذا الجزء والذي يمثل الجانب التطبيقـــي لهـذه الورقة تم استخدام أسلوب المحاكـــاة لغـرض الحصول على مقدرات العزوم ومقدرات الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل (α) لتوزيع Loma. فقد تمت كـــتابة برامج البحث باستخدام برنامج الـ R في إجــراء تجارب المحاكـاة بمراحــلها مـــن تــوليد البيانات إلى مرحلة استخراج النتائج بالاعتماد على معيار المفاضلة بين الطرق المدروسة وذلـك بتوليد عينات عشوائية من التوزيع Lomax بالمعلمتين (α,β) فقد تم بناء التجارب وفق الخوارزمية الآتية:

1- تم استخدام أحجام عينات $(n = 10, 50, 100)$.

2- توليد بيانات للتوزيع Lomax بالمعلمتين $(\alpha = \theta, \beta = 2)$ أي عندما تكون قيمة معلمة القياس قيمة ثابتة ومعلمة الشكل مساوية لـ $(\alpha = \theta = 1.5, 2, 3, 4)$.

3-نفترض أربع قيم لمعلمتي توزيع معلمة الشكل (α) للتوزيع.

4- إجراء التجارب المختلفة للفروض المتقدم ذكرها آنفا من خلال تكرار هذا التوليد للتوزيع Lomax لـ $(N = 1000)$ مرة لكل تجربة ولكل حجم عينة (n).

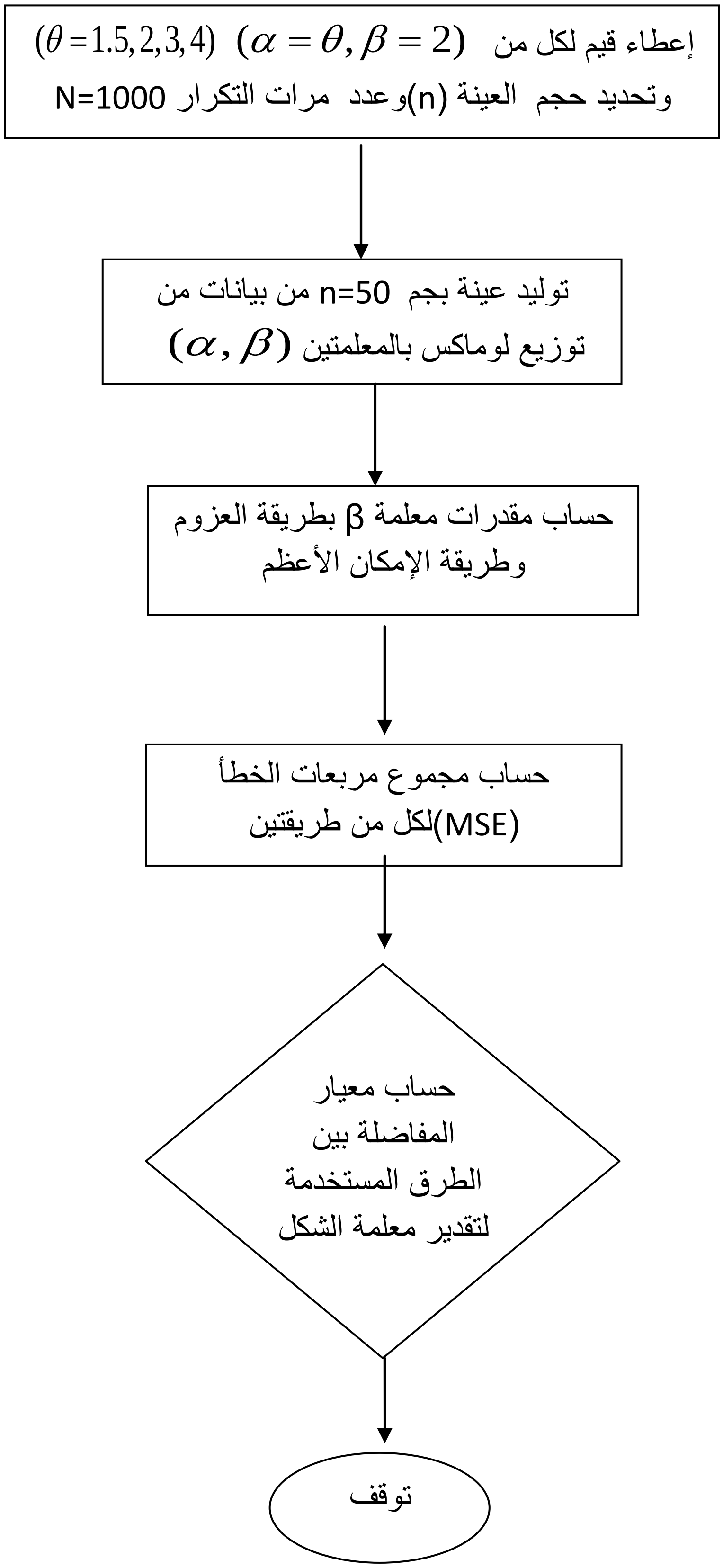
5- يتم استـــــخدام صيغ التقدير بطريقة العــزوم وطريقة الإمكان الأعــظم على الــتوالي.

ولمعرفة أفضلية التقديرات نستخدم معيار متوسط مربع الخطأ(MSE). والذي يمــكن حسابه بالطريقة $MSE = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\alpha - \hat{\alpha})^2}{N}$ حيث أن (N) تمثل التكرار وأن $\hat{\alpha}$ تمثل مقدر المعلمة وفقا لواحدة من طرق التقدير، β تمثل معلمة التوزيع الحقيقية.

بالتطبيق الخطوات أعلاه نجد أن :

$$MSE = \sum_{i=1}^{1000} \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{1000}$$

حيث أن α_i تكون إحدى القيم المفترضة لمعلمة الشكل، وكلما اقتربت قيمة هذا المعيار من الصفر تزداد جودة التقدير.



الشكل (4-1) الخطوات المتتبعة لأسلوب المحاكاة

الجدول (4-1): يبين القيم لـ $(\hat{\alpha})$ المقدرة مع قيم متوسط مجموع المربعات

MSE للطرق المستخدمة

الطريقة	المعالم	المقدر لـ $\alpha(\hat{\alpha})$			متوسط مجموع المربعات MSE		
		حجم العينة (n)			حجم العينة (n)		
	α	10	50	100	10	50	100
العزوم	1.5	1.2851	1.2844	1.2552	0.00330	0.0068	0.00330
الإمكان الأعظم	1.5	1.3186	1.2464	1.2698	0.00325	0.001002	0.00325
العزوم	2	1.5604	1.6390	2.0038	7880.00	0.008515	0.00178
الإمكان الأعظم	2	2.4204	2.2520	2.0271	0.00610	0.004938	0.00101
العزوم	3	3.0002	3.0035	2.9550	8760.00	0.0099	0.000578
الإمكان الأعظم	3	3.0111	2.9572	2.9311	0.00208	0.000551	0.00008
العزوم	4	3.9888	3.7416	4.0888	4780.00	0.001530	0.00099
الإمكان الأعظم	4	3.9498	3.9761	4.0198	2660.00	0.00069	0.0000226

الفصل الرابع

المقدمة:

استنادا على حقيقة إن تجارب المحاكاة يمكن استخدامها كبديل فعال لتقييم الطرق الإحصائية توفيرا للجهد والوقت والكلفة ،تم تنفيذ تجارب محاكاة ؛لغرض مقارنة أداء بعض الطرق لتقدير معلمة توزيع لوماكس، وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم بتوليد بيانات ثم نقارن القيم المقدرة .

أهم الاستنتاجات والتوصيات:

أولا :الاستنتاجات

أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال النتائج المتحصل عليها بالجدول السابق وبشكل عام نلاحظ أن جودة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة لكل الطرق المستعملة وفقا لمعيار المفاضلة المستعمل في هذا البحث.

1- كلما زاد حجم العينة زادت جودة التقدير باستخدام طرق التقدير المــختلفة وذلــك من خلال تناقص قيم متوسط مجموع مربعات الخطأ MSE.

2- طــريقة العزوم وطريقة الإمــكان الأعظم أعطت نتائج لــلقيم المقدرة لمعلمة الشكل (α) وقيم MSE .

ثانيا: التوصيات

1- نوصي باعتماد طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمة الشكل لتوزيع لوماكس .

2- نوصي بإجراء بحوث بنفس الاتجاه تخص نموذج توزيع لوماكس.

3- استخدام طرق أخرى لتقدير معالم توزيع لوماكس والمقارنة بينهما.

4- نوصي باستخدام نظرية الغاية المركزية لتقارب توزيع لوماكس من التوزيع الطبيعي تحت شروط معينة .

5- نوصي بتوسع الدراسة حتى تشمل تقديرات بفترة .

المراجع:

1. على عمر عبدا لمحسن (2011)، مقارنة لطرائق التقدير لمعلمتي التوزيع اللوجيستي، بحث منشور في مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية في المجلد 17 العدد 62.

2. جنان عباس ناصر (2014)، طرائق مختلفة لتقدير معلمتي الموقع والقياس لتوزيع القيمة المتطرفة بحث منشور في مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية في المجلد 20 العدد 77.

3. جنان عباس ناصر (2015)، مقارنة خصائص مقدرات العزوم الاحتمالية الموزونة مع العزوم التقليدية لتوزيع Lomax ذي المعلمتين، بحث منشور في مجلة كلية بغداد للعلوم الاقتصادية في المجلد 20 العدد 46.

4. جنان عباس ناصر (2016)، مقدر بيز لمعلمة القياس للتوزيع الطبيعي تحت افتراض توزيعات أولية مختلفة، بحث منشور في مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية في المجلد 22 العدد 92.

5. Abd Ellah, A.H., (2003),'Bayesian one sample prediction bounds for the Lomax distribution ', Indian J. Pur. Appl. Math., 34(1):101-109.
6. Al-Kutubi, HS (2005). On Comparison Estimation Procedures for parameter and survival function. Iraqi Journal of Statistical Science, 9: 1-14.
7. Arnold B. C., Castillo E., and Sarabia J. M., (1998), “Bayesian analysis for classical distributions using conditionally specified priors,” Sankhya B, 60(2): 228–245.
8. Bickel, P.J. & Doksum, K. A., (1977), " Mathematical Statistics: Basic Ideas

9. Abd Ellah, A.H., (2003),'Bayesian one sample prediction bounds for the Lomax distribution ', Indian J. Pur. Appl. Math., 34(1):101-109.

10. Al-Kutubi, HS (2005). On Comparison Estimation Procedures for parameter and survival function. Iraqi Journal of Statistical Science, 9: 1-14.

11. Arnold B. C., Castillo E., and Sarabia J. M., (1998), “Bayesian analysis for classical distributions using conditionally specified priors,” Sankhya B, 60(2): 228–245.

12. Bickel, P.J. & Doksum, K. A., (1977), " Mathematical Statistics: Basic Ideas
and Selected Topics ", Holden- Day, Inc., San Francisco.

13. Balkema A. and de Haan L., (1974), “Residual life time at great age,” Annals of Probability, 2(5):792–804.

14. Bryson M. C., (1974), “Heavy-tailed distributions: properties and tests,” Technometrics, 16(1):61–68.

15. El-Din M. M., Okasha H. M., and Al-Zahrani B., (2013), “Empirical bayes estimators of reliability performances using progressive type-II censoring from Lomax model,” Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, 5(1):74–83.

16. Giles, D. E., H. Feng & R. T. Godwin (2011),' On the Bias of the Maximum Likelihood Estimator for the Two- Parameter Lomax Distribution', Econometrics Working Paper EWP1104, Department of Economics, University of Victoria.

17. Johnson N., Kotz S., and Balakrishnan N., (1994), Continuous Univariate Distribution, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2nd edition.

18. Lomax, K., (1954) Business Failures; Another example of the analysis of failure data. Journal of the American Statistical Association - JSTOR 49:847–852.

19. Morteza, S. M., Farhad, Y.& Manoochehr, B., (2012) ,'Inference for Lomax Distribution under Generalized Order Statistics', Applied Mathematical Sciences, 6(105):5241 – 5251.

20. Parviz, N. &Saman, H., (2012),'Statistical Inferences for Lomax Distribution Based on Record Values (Bayesian and Classical)', Journal of Modern Applied Statistical Methods,11(1):179-189.

21. Panahi, H. & Asadi, S., (2011),'Inference of Stress-Strength Model for a Lomax Distribution', World Academy of Science, Engineering and Technology 55.

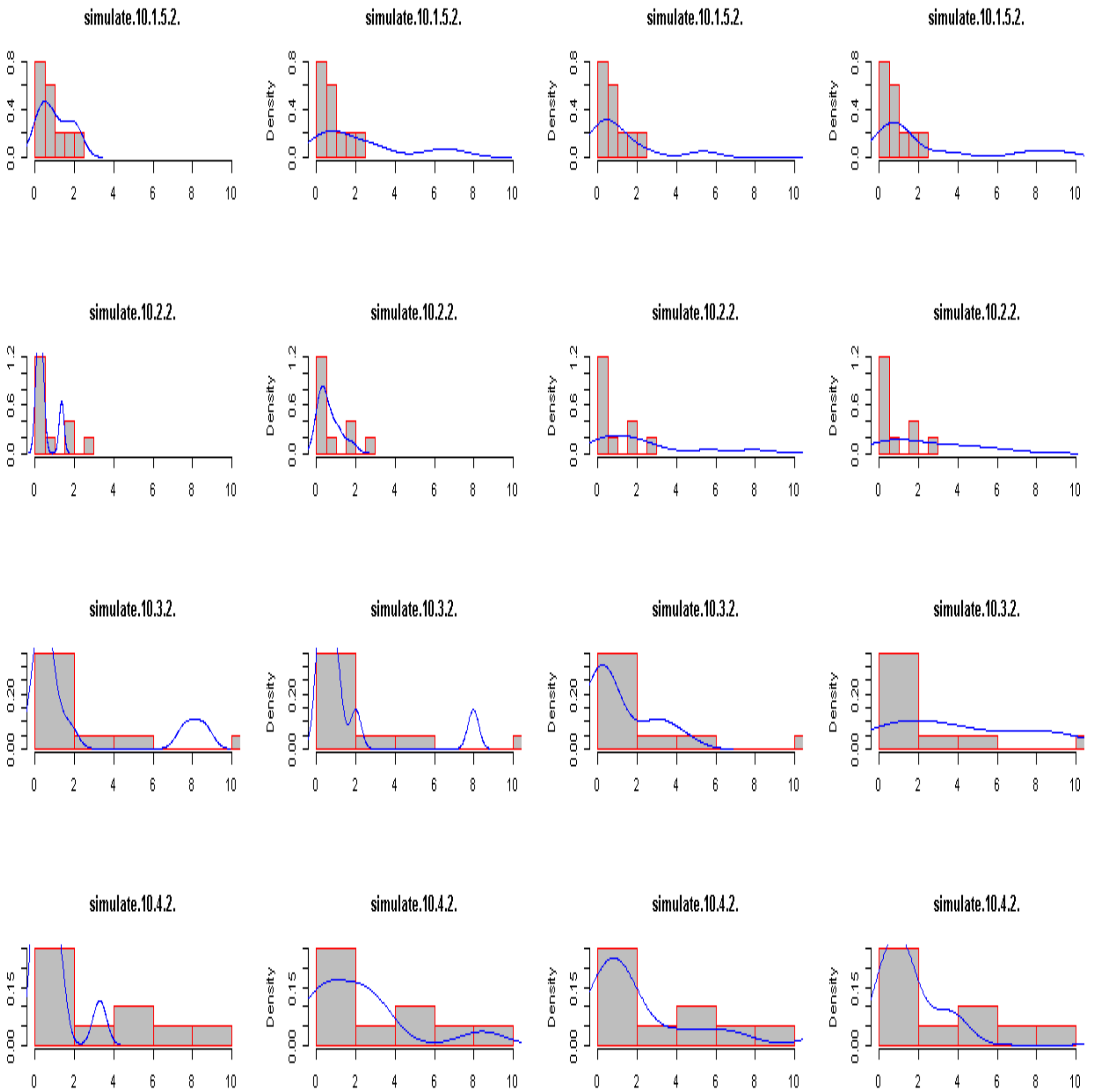
الملاحق

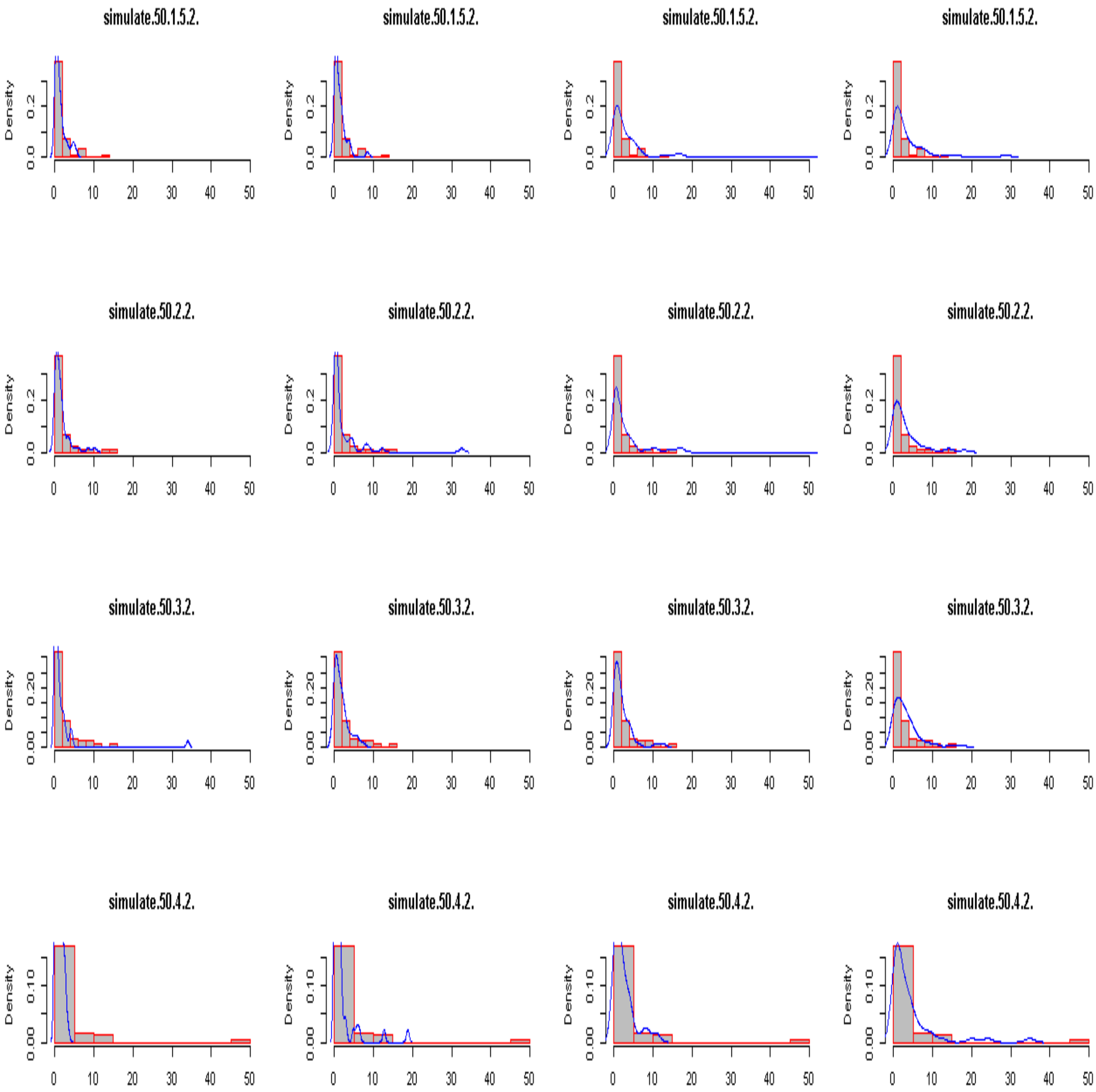
الملحق (أ)
برنامج R

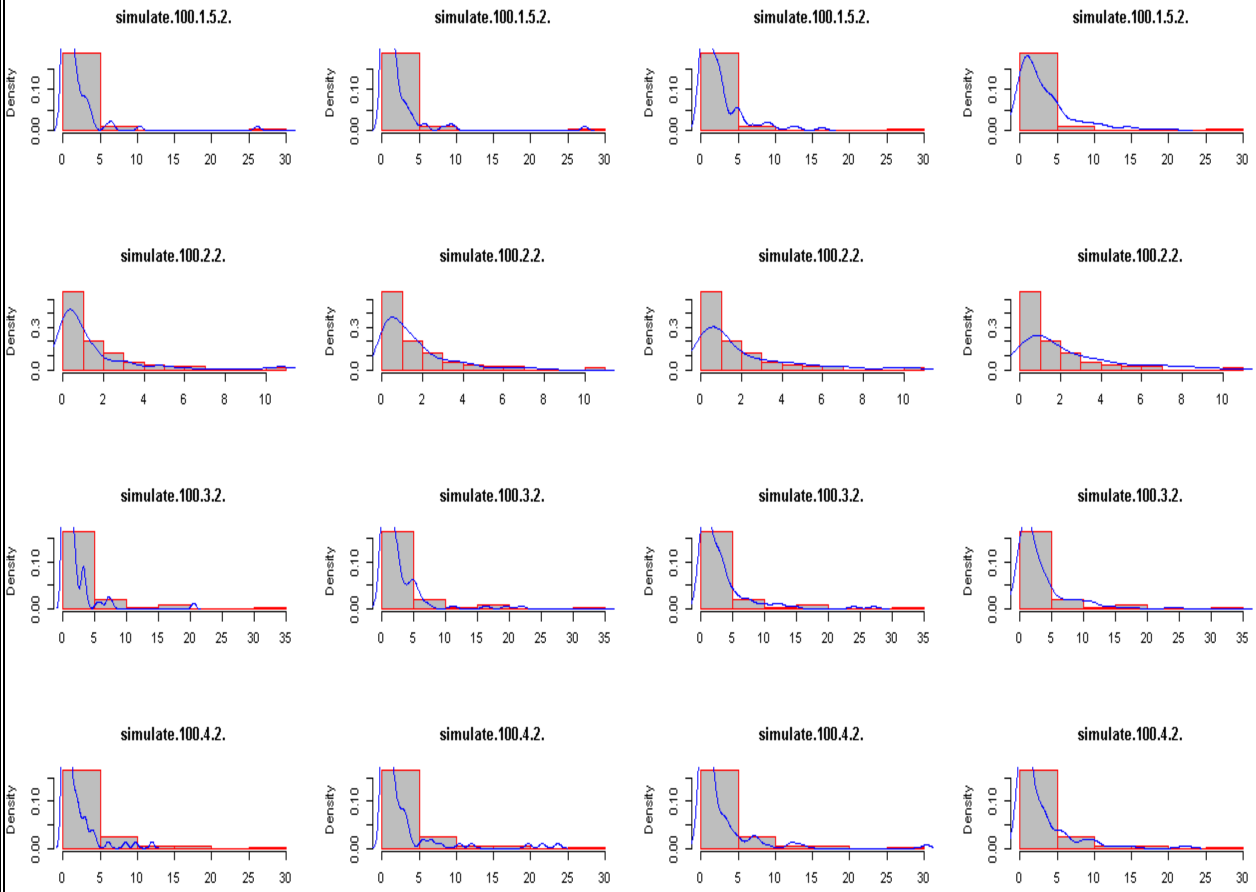
```
library(ggplot2)
plot.multi.dens <- function(s)
{
junk.x = NULL
junk.y = NULL
for(i in 1:length(s))
{
junk.x = c(junk.x, density(s[[i]])$x)
junk.y = c(junk.y, density(s[[i]])$y)
}
xr <- range(junk.x)
yr <- range(junk.y)
plot(density(s[[1]]), xlim = xr, ylim = yr, main = "")
for(i in 1:length(s))
{
lines(density(s[[i]]), xlim = xr, ylim = yr, col = i,main="")
}
}
#usage:
x = rlomax(100,1.5,2)
y = rlomax(100,2,2)
z = rlomax(100,3,2)
# the input of the following function MUST be a numeric list
plot.multi.dens(list(x,y,z))
library(Hmisc)
le <- largest.empty(x,y,10,.5)
legend(le,legend=c("x","y","z"), col=(1:3), lwd=2, lty = 1)

# Density plot
# Multiple histograms
par(mfrow=c(4,4))
colnames <- dimnames(sampledata)[[2]]
for (i in 1:4) {
for (j in c(1.5,2,3,4)) {
   d <- density(rlomax(10,j,2))
   hist(sampledata[,i], xlim=c(0, 10),xlab="", main=colnames[i],
probability     =TRUE, col="gray", border="red")
   lines(d, col="blue") }
              }
par(mfrow=c(4,4))
colnames <- dimnames(sampledata)[[2]]
```

```
for (i in 5:8) {
for (j in c(1.5,2,3,4)) {
   d <- density(rlomax(50,j,2))
   hist(sampledata[,i], xlim=c(0, 50),xlab="", main=colnames[i],
probability     =TRUE, col="gray", border="red")
   lines(d, col="blue") }
             }
par(mfrow=c(4,4))
colnames <- dimnames(sampledata)[[2]]
for (i in 9:12) {
for (j in c(1.5,2,3,4)) {
   d <- density(rlomax(100,j,2))
   hist(sampledata[,i], xlab="", main=colnames[i], probability
=TRUE, col="gray", border="red")
   lines(d, col="blue") }
             }
```

الملحق (ب)
نتائج تجارب المحاكاة




simulate.50.1.5.2.
simulate.50.1.5.2.
simulate.50.1.5.2.
simulate.50.1.5.2.
simulate.50.2.2.
simulate.50.2.2.
simulate.50.2.2.
simulate.50.2.2.
simulate.50.3.2.
simulate.50.3.2.
simulate.50.3.2.
simulate.50.3.2.
simulate.50.4.2.
simulate.50.4.2.
simulate.50.4.2.
simulate.50.4.2.
Density
0 10 20 30 40 50


simulate.100.1.5.2.
simulate.100.1.5.2.
simulate.100.1.5.2.
simulate.100.1.5.2.
simulate.100.2.2.
simulate.100.2.2.
simulate.100.2.2.
simulate.100.2.2.
simulate.100.3.2.
simulate.100.3.2.
simulate.100.3.2.
simulate.100.3.2.
simulate.100.4.2.
simulate.100.4.2.
simulate.100.4.2.
simulate.100.4.2.
Density