دولـــة ليبيا

جامعة سبها

SEBHA UNIVERSITY - LIBYA

كلية العلوم / قسم الرياضيات

بحث مقدم لاستكمال متطلبات الحصول على درجة البكالوريوس بعنوان:

خوارزميات رونج كوتا نيستروم من الرتبة الثالثة لحل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية

إعداد الطالبة:

غزالة محمــد بوعــــــزوم

تحت إشراف:

أ. هند محمد المهدي القاضـي

العام الجامعي

2021-2020 ف

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَجَعَلْنَا اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ آيَتَيْنِ فَمَحَوْنَا آيَةَ اللَّيْلِ وَجَعَلْنَا آيَةَ النَّهَارِ مُبْصِرَةً لِّتَبْتَغُوا فَضْلًا مِّن
رَّبِّكُمْ وَلِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ ۚ وَكُلَّ شَيْءٍ فَصَّلْنَاهُ تَفْصِيلًا)

صدق الله العظيم

سورة الاسراء- جزء من الآية [12]

الإهداء

نسير في دروب الحياة, ويبقى من يسيطر على أذهاننا في كل مسلك نسلكه صاحب الوجه الطيب, والأفعال الحسنة فلم يبخل عليا طيلة حياته

" والدي العزيز "

إلى من أفضلها على نفسي , ولم لا.. فلقد ضحت من أجلي ولم تدخر جهدا في سبيل إسعادي على الدوام .

" أمي الغالية "

إلى أهلي وأصدقائي, وجميع من وقفو بجواري وساعدوني بكل ما يملكون, وإلى جميع أساتذتي الكرام, ممن لم يتوانوا في مد يد العون

أهديكم بحث تخرجي

شكر وتقدير

إلى من له الشكر دون انقطاع هو الله الذي ألهمني ومنحني الطاقة والقدرة على شق هذا الطريق من دون حول لي ولا قوة .

أتوجه بكل آيات الود والعرفان بكل احترام وتقدير إلى من مهد لي الطريق وأنار لي الدرب , وأخص بالذكر الأستاذة الفاضلة : **هند محمد المهدي القاضي** .

واتقدم بجزيل الشكر علي كل من مد يد العون والمساعدة في إخراج هذه الدراسة على اكمل وجه .

الفهرس

الخلاصة

تم في هذا البحث دراسة طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية باستخدام رونج-كوتا (RK) التي وجد أنها تحتاج الى اختزال او تخفيض الرتبة من الثانية إلى الأولى وقد وجد أنها دقيقه في الحل ولكن تحتاج جهد ووقت كبير في الحل عند التطبيق .ولتغلب على هذه المشكلة تم دراسة طرق رونج-كوتا-نيستروم (RKN) لحل المسائل القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية، حيث تم استنتاج شروط الرتبة لهذه الطريقة وتطبيقها في حل مسائلة القيمة الابتدائية وهذه الطريقة الجديدة سهلة الاستخدام والبرمجة.

الفصل الأول

1 مقدمة Introduction

التحليل العددي (Numerical Analyses) يستخدم في حل المعادلات الرياضية التي يصعب حلها أو يستلزم وقت طويلا في الحل، فمثلا اذا كانت لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى فانه من الممكن حلها بالطرق العددية التقليدية منها استخدام خوارزمية عالية الدقة من خطوة واحدة تستخدم على نطاق واسع في الهندسة وهي خوارزمية (Runge-Kutta) , نظرًا لأن هذه الخوارزمية تتمتع بدقة عالية ويتم اتخاذ تدابير لقمع الخطأ ، و حتى هذه الطريقة تاخد وقتا، إما إذا كانت المعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وأكثر يكون من الصعب دائما التعامل مع المعادلة تقليديا، لذلك استخدمت لحل هذا النوع من المسائل طرق رونج- كوتا- نيستروم (Runge-Kutta-Nystrom) (RKN) أو طرق نيستروم حيث قام العالم نيستروم عام 1925 بتعديل الصيغة العامة لطرق RK بحيث يتم الحصول على الحلول العددية لمسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية دون اللجوء إلى تخفيض الرتبة [4] والتي سوف نقوم بدراستها في هذا البحث وكيفية تطبيق ذلك باستخدام برنامج MATLAB وبيان أهميته البالغة في حل هكذا معادلات، و ذلك لتوفير الوقت و الجهد. و بالأخص في المعادلات التي تحتاج إلى تكرار كبير من اجل الوصول إلى النتيجة أو الحل .

1.1 مشكلة الدراسة : Problem of the Study

عند تطبيق طريقة رونج كوتا على مسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية فإنه يتطلب ذلك تخفيض أو اختزال رتبة المعادلة التفاضلية إلى الرتبة الأولى مما يترتب عنه تكوين معادلتين تفاضليتين ومن تم تطبيق الطريقة، وهذا العمل يجعلنا نحتاج إلى الكثير من العمليات الحسابية لإيجاد حل مسالة القيمة الابتدائية. إضافة إلى ذلك ازدياد الحسابات بزيادة رتبة الطريقة. وللتقليل من هذه الحسابات تم دراسة طرق رونج كوتا نيستروم لإيجاد الحل.

2. 1 الهدف من الدراسة : Objective of the Study

تسعي الدراسة الحالية لتحقيق الأهداف التالية:

1. التعرف علي خورزميات طرق رونج كوتا نيستروم لحل مسألة القيمة الابتدائية .
2. التقليل من العمليات الحسابية وذلك بإيجاد حل مسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية مباشرة دون الحاجة إلى تخفيض رتبة المعادلة.
3. تطبيق طريقة الحل باستخدام احد لغات البرمجة و ذلك لتوفيره الوقت و الجهد.

3.1 أهمية الدراسة: Important of the Study

خوارزميات رونج كوتا تلعب دورا كبيرا في حل العديد من المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها تحليليا, حيث أنه يوجد عدد لا نهائي من خوارزميات رونج كوتا ابتداء من المرحلة الثانية ولا يمكن الحكم على أي من هذه الخوارزميات التي من نفس المرحلة أنها أفضل من غيرها عند حل مسألة ما, لأن ذلك يعتمد على طبيعة المعادلة التفاضلية, وكذلك طول الخطوة يؤثر في دقة الحل ومرحلة الطريقة.

أدوات البحث:

استخدام لغة الماتلاب (MatLab 2013).

4.1 أقسام الدراسة: Outline of the Study

الفصل الأول: Chapter-1

أوردتُ فيه مقدمة عن طريقة رونج كوتا نيستروم بالإضافة إلى مشكلة الدراسة وأهمية الدراسة وهدف الدراسة و أقسام الدراسة.

الفصل الثاني: Chapter-2

طرق في هذا الفصل لتعاريف أساسية ونظريات التي تحتاجها الدراسة مع التوضيح بأمثلة كيفية استخدام طريقة رونج كوتا وكيفية تخفيض الرتبة لحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية باستخدام طريقة رونج كوتا .

الفصل الثالث: Chapter-3

في هذا الفصل تم دراسة طريقة رونج كوتا نيستروم واستنتاج شروط الرتبة واشتقاق طرق رونج كوتا من الرتبة الثالثة ودراسة صيغ مختلفة لطرق رونج كوتا نيستروم مع التوضيح بأمثلة وتطبيقها باستخدام برنامج ماتلاب للحصول على النتائج العددية , كما يحتوي هذا الفصل على الاستنتاجات والتوصيات والمراجع.

الفصل الثاني

2 مقدمة

في هذا الفصل سيتم التطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية والنظريات المهمة لهذا البحث.

1.2 المعادلة التفاضلية Differential Equation

المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y وتفاضلاتy بالنسبة الى x.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية يمكن التعبير عنها كالأتي:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \; ; y = f(x) \; ;$$ عدد طبيعي $n \geq 1$

إي إنها معادلة تتضمن دالة مجهولة ومشتقاتها[1].

المعادلات التفاضلية العادية (Ordinary Differential Equations)

وتختصر ب .O.D.E وهي المعادلة التي تحتوي علي تفاضلات عادية مثل:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

بمعنى أن الدالة المجهولة تعتمد على متغير مستقل واحد .

المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equations)

وتختصر ب .P.D.E وهي المعادلة التي تحتوي علي تفاضلات جزئية مثل:

$$\frac{\partial \mathrm{u}(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{u}(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mathrm{u}(x, y)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n \mathrm{u}(x, y)}{\partial x^n}$$

بمعنى أن الدالة المجهولة تعتمد على متغيرين مستقلين أو أكثر.

2.2 رتبة المعادلة التفاضلية Order of a Differential Equation

هي رتبة أعلي مشتقة بالمعادلة التفاضلية .

3.2 درجة المعادلة التفاضلية Degree of a Differential Equation

هي قوة أعلي مشتقة بالمعادلة التفاضلية بشرط أن تكون جميع المشتقات خالية من الأسس السالبة أوالأسس الكسرية .

4.2 حل المعادلة التفاضلية

Solution of a Differential Equation

الدالة $y = f(x)$ المعرفة في فترة $\mathrm{I} \in IR$ حل للمعادلة التفاضلية

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

إذا كانت:

1- y قابلة للاشتقاق n من المرات في الفترة $\mathrm{I} = (a, b)$.

2- تحقق المعادلة التفاضلية تطابقياً في هذه الفترة.

إي إن:

$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \forall x \in \mathrm{I}$ إذا رسمنا أحد حلول المعادلة في مستوى يتشكل منحنى, هذا المنحنى يسمى منحنياً تكاملياً للمعادلة التفاضلية .

1.4.2 الحل العام للمعادلة التفاضلية

General Solution of a Differential Equation

وهو علاقة بين x, y تحتـوي علي عـدد من الثوابت الاختيارية مساوياً لرتبة المعادلة التفاضلية إي إن الحل العام للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة n يكون علي الصورة :

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

2.4.2 الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

Particular Solution of a Differential Equation

هو حل يمكن الحصول عليه من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً معلومة محدوده.

نظرية الوجود و الوحدانية1:

Existence and Uniqueness Theorem

إذا تحقــق لمسألة القيـــمة الابتدائية من الرتـبة الأولـــى $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ الشروط التالية:

1. الدالة $f(x,y)$ متصلة في المـــنطقة $R: |x-x_0| \le a\ , |y-y_0| \le b$ ويـــوجد ثابت M بحيث $|f(x,y)| \le M$.
2. الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز:

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le A|y_1-y_2|, \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \mathrm{R}$ و A ثابت ليبشيتز (لا يعتمد عل x,y_1,y_2).

عندئذ يوجد حل وحيد $y=y(x)$ على الفترة $|x-x_0| \le h$ حيث :

$$h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

5.2 الخوارزمية Algorithm

هي طريقة لإيجاد حل مسألة ما أو لإيجاد الحل التقريبي لها في خطوات نهائية ومرتبة ترتيبًا منطقيًا.

6.2 التحليل العددي Numerical Analysis

هو بناء خوارزمية لمسألة رياضية مستمرة (أي يوجد لها حل) وفق خطوات تكرارية.

7.2 الخطأ المطلق Absolute Error

هو القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحقيقية والعددية للعدد x ويرمز له بالرمز AE

$$AE = |x - x^*|$$

حيث x^*, x القيمة الحقيقية والتقريبية (العددية) للعدد x على التوالي.

نظرية2[2]:

لنفرض أن الدالة $f(x,y)$ وكل تفاضلاتها الجزئية بترتيب أصغر من أو يساوي $(\mathrm{n}+1)$ متصلة على $\mathrm{D} = \{(\mathrm{x},y)\ ; \mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}\ , \mathrm{c} \le y \le \mathrm{d}\}$

إذا كانت (x,y_0), فإن لكل $(x,y) \in D$ يوجد عدد ξ بين x و 0 وعدد آخر η بين y_0, y بالخاصة

$$f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$$

عندما تكون :

$$\mathrm{P_n}(x,\mathrm{y}) = f(x_0,y_0) + \left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

$$+ [\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$$

$$+ [\frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)]$$

$$+ \cdots + [\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)]$$

و $R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(\xi,\eta)]$

تسمى P_n بحدودية تايلور ذو الدرجة n في متغيرين للدالة f حول (x_0,y_0) ويسمى $R_n(x,y)$ بالحد الباقي المرافق ل $\mathrm{P_n}(x,\mathrm{y})$.

تسمى هذه الصيغة بمفكوك تايلور للدالة $f(x,y)$ حول (x_0,y_0)، ويسمى $\mathrm{R_n}$ الباقي.

8.2 طرق رونج كوتا Runge Kutta Methods

طرق رنج كوتا هي مجموعة من التعابير العددية أحادية الخطوة (حيث يتم تقدير قيمة الدالة عند نقطة معينة باستخدام قيمة الدالة عند النقطة السابقة فقط)وتستخدم لحل المعادلات التفاضلية العادية وهي تعابير من المرتبة الثانية فأكثر[3].

الصورة العامة لطريقة رونج - كوتا من المرحلة s لحل مسألة القيمة الابتدائية[4].

$$\frac{d\mathrm{y}}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \ \ , y(x_0) = y_0 \ ; \ a \le x \le b$$

$$\left.\begin{aligned} K_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i K_i \end{aligned}\right\}$$

حيث

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \qquad ; i = 1,2,\dots,s$$

مثال1.2:

استخدم طريقة رونج كوتا ذات المراحل الأربعة لتقدير لحل مسألة القيمة الإبتدائية

$$y' = (1-x)y^2 - y, \;\; y(0) = 1, \;\; h = 0.1$$

حيث الحل الحقيقي $y(x) = \frac{1}{e^{x}-x}$

الحل:

$$K_1 = h.f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$$
$$K_3 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2})$$
$$K_4 = h.f(x_i + h, y_i + K_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = 0.1[(1-x_i)(y_i)^2 - y_i]$$

$$K_2 = 0.1\left[\left(1 - x_i - \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{K_1}{2}\right)^2 - (y_i + \frac{K_1}{2})\right]$$

$$K_3 = 0.1[\left(1 - x_i - \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{K_2}{2}\right)^2 - \left(y_i + \frac{K_2}{2}\right)]$$

$$K_4 = 0.1[(1 - x_i - h)(y_i + K_3)^2 - (y_i + K_3)$$

وعندما $x_0 = 0$ $\quad h = 0.1, \quad i = 0, \quad y_0 = 1,$ لدينا

$$K_1 = 0.1[(1-0)(1)^2 - 1]$$
$$K_2 = 0.1[(1 - 0 - 0.005)(1+0) - (1+0)]$$
$$= 0.1[0.95 - 1] = -0.005$$
$$K_3 = 0.1[(1 - 0 - 0.05)\left(1 - \frac{0.005}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{0.005}{2}\right)]$$
$$= 0.1[(0.95)(0.9950) - (0.9975)]$$
$$= -0.005225$$
$$K_4 = 0.1[(1 - 0 - 0.1)(1 - 0.00522)^2 - (1 - 0.00522)$$
$$= 0.1[(0.9)(0.9895) - (0.99478)]$$
$$= -0.010423$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(-0.005) + 2(-0.00522) - 0.0101423)$$

$$= 0.99485$$

وعندما $, i = 1, y_1 = 0.9948, h = 0.1, x_1 = 0.1$

$$K_1 = 0.1[(1 - x_1)(y_1)^2 - y_1]$$

$$K_1 = 0.1[(1 - 0.1)(0.9948)^2 - 0.9948]$$

$$= -0.010413$$

$$K_2 = h\left[\left(1 - x_1 - \frac{h}{2}\right)\left(y_1 + \frac{K_1}{2}\right)^2 - (y_1 + \frac{K_1}{2})\right]$$

$$K_2 = 0.1\left[(1 - 0.1 - 0.05)\left(0.9948 - \frac{0.010413}{2}\right)^2 - \left(0.9948 - \frac{0.010413}{2}\right)\right]$$

$$= 0.1[(0.85)(0.9896)^2 - (0.9896)]$$

$$= 0.1[(0.85)(0.9793) - (0.9896)]$$

$$= 0.1[0.832405 - (0.9896)]$$

$$= 0.1[-0.157]$$

$$= -0.0157$$

$$K_3 = h[\left(1 - x_1 - \frac{h}{2}\right)\left(y_1 + \frac{K_2}{2}\right)^2 - \left(y_1 + \frac{K_2}{2}\right)]$$

$$= 0.1[(1 - 0.1 - 0.05)\left(0.9948 - \frac{0.0157}{2}\right)^2 - \left(0.9948 - \frac{0.0157}{2}\right)]$$

$$= 0.1[(0.85)(0.97407) - (0.98695)]$$

$$= 0.1[0.8279 - 0.98695]$$

$$= 0.1[-0.15899]$$

$$= -0.01589$$

$$K_4 = 0.1[(1 - x_1 - h)(y_1 + K_3)^2 - (y_1 + K_3)]$$

$$K_4 = 0.1[(1-0.1-0.1)(0.998-0.01589)^2-(0.9948-0.01589)$$
$$= 0.1[(0.85)(0.95826)-(0.97891)]$$
$$0.1[-0.16438]$$
$$= -0.016438$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$= 0.99485 + \frac{1}{6}[-0.0104 + 2(-0.0157) + 2(-0.01589) + (-0.016438)]$$
$$= 0.99485 - 0.01500$$
$$y_2 = 0.9798533$$

الجدول (1.2) نتائج حل المسألة في المثال (1.2) بإستخدام طريقة رونج كوتا ذات المراحل الاربعة .

i	x_n	الحل العددي y_n	الحل الحقيقي	مقدار الخطأ
0	0	*1*	*1*	0
1	0.1	0.9949	0.58197	0.41293
2	0.2	0.9790	0.18556	0.79344
3	0.3	0.9525	0.05850	0.89400
4	0.4	0.9159	0.01976	0.89614
5	0.5	0.8705	0.00697	0.86352
6	0.6	0.8183	0.00251	0.81578
7	0.7	0.7612	0.00091	0.76028
8	0.8	0.7015	0.00033	0.70116
9	0.9	0.6412	0.00012	0.64107

كيفية استخدام برنامج ماتلاب للحصول على النتائج العددية في المثال 1.2.

يتم كتابة هذه الخوارزمية في الفورم ITORED والظغط على Run .

```
x0=input('enter x0:');
```

```
y0=input('enter y0:');
h=input('enter h:');
for i=1:9
k1=((1-x0)*((y0)^2))-y0;
k2=(1-(x0+(h/2)))*((y0+(h/2)*k1)^2)-
(y0+(h/2)*k1);
k3=(1-(x0+(h/2)))*((y0+(h/2)*k2)^2)-
(y0+(h/2)*k2);
k4=(1-(x0+h))*((y0+h*k3)^2)-(y0+h*k3);
y1=y0+(h/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);
x1=x0+h;
i
[x1 y1]
x0=x1;
y0=y1;
end
```

سـوف يظهر لنا في الفورم Command Window

enter x0:0
enter y0:1
enter h:0.1

i=

1

ans=

0.9949 0.1000

i=

2

ans=

0.9790 0.2000

i=

3

ans=

0.9525 0.3000

i=

4

ans=
0.9159   0.4000
i=
5
ans=
0.8705   0.5000
i=
6
ans=
0.8183   0.6000
i=
7
ans=
0.7612   0.7000
i=
8
ans=
0.7015   0.8000
i=
9
ans=
0.6412   0.9000

مثال2.2:

إذا كان لدينا مسالة القيمة الابتدائية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 81y = 0; \quad y(0) = 1; \;\; y'(0) = -2; \quad\; 0 \le x \le 1$$

حيث الحل التحليلي $y = \cos(9x) - \frac{2}{9}\sin(9x)$.

لتطبيق طريقة رونج كوتا على هذه المسالة فإننا نحتاج الى تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولي ويمكن أن يتم ذلك بفرض أن:

$$\frac{dy}{dx} = z \;;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = -81y$$

بذلك نتحصل على مسالة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f_1 = z\;;\;\; y(0) = 1$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2 = -81y(x);\; z(0) = -2$$

حيث $x_0 = 0;\;\; y_0 = 1;\;\; z_0 = -2$

ومن هذ النظام نجد أن الحل الحقيقي هو:

$$y = \frac{1}{9}(9cos9x - 2sin9x)$$

$$z = -2cos9x - 9sin9x$$

الآن نستخدم طريقة رونج – كوتا من الرتبة الثالثة (RK3) الموضحة في الشكل الآتي لحل مسالة القيمة الابتدائية في هذا المثال بعد تخفيضها إلى منظومة معادلات من الرتبة الأولى.

عندما $n = 0$

$$k_1 = \mathrm{f}_1(x_0, y_0, z_0) = f(0,1,-2) = z_0 = -2$$

$$k_{11} = \mathrm{f}_2(x_0, y_0, z_0) = f(0,1,-2) = -81y_0 = -81$$

$$k_2 = \mathrm{f}_1\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{hk_1}{3}, z_0 + \frac{hk_{11}}{3}\right)$$

$$f_1 = z_0 + \frac{hk_{11}}{3} = (-2) + \frac{(0.1)(-81)}{3} = -4.7$$

$$k_{22} = \mathrm{f}_2\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{hk_1}{3}, z_0 + \frac{hk_{11}}{3}\right)$$

$$= f_2\left(0+\frac{0.1}{3}, 1+\frac{(0.1)(-2)}{3}, (-2)+\frac{(0.1)(-81)}{3}\right)$$

$$= (-81)\times\left(1+\frac{(0.1)(-2)}{3}\right) = -75.6$$

$$k_3 = f_1\left(x_0+\frac{2h}{3}, y_0+h(0k_1+\frac{2k_2}{3}), z_0+h(0k_{11}+\frac{2k_{22}}{3})\right)$$

$$= 0.1\left(\frac{2\times(-75.6)}{3}\right) = -5.04$$

$$k_{33} = f_2\left(x_0+\frac{2h}{3}, y_0+\frac{2hk_2}{3}, z_0+\frac{2hk_{22}}{3}\right) = -81\left(1+\frac{2(0.1)(-75.6)}{3}\right)$$

$$= 327.24$$

$$y(x_0+h) = y_0+\frac{h}{4}(k_1+(0)k_2+3k_3) = 1+\frac{0.1}{4}\big(-2+0+3(-5.04)\big)$$

$$= 0.572$$

$$z(x_0+h) = z_0+\frac{h}{4}(k_{11}+(0)k_{22}+3k_{33});\;\; x_0+h = 0+0.1 = 0.1$$

$$y(0.1) = 1+\frac{0.1}{4}\big(-2+0+3(-5.04)\big) = 0.572$$

الجدول (2.2) التالي يوضح النتائج العددية المتحصل عليها عند تطبيق برنامج ماتلاب .

الجدول (2.2) يوضح النتائج العددية باستخدام برنامج ماتلاب

x_n	الحل العددي y_n	الحل الفعلي $y(x_n)$	الحل العددي z_n	الحل الفعلي $z(x_n)$
0	1	1	-2	-2
0.1	0.4220000	0.4475373	-8.1965000	-8.2931621
0.2	-0.4579072	-0.4436126	-7.8336605	-8.3102244
0.3	-0.9500664	-0.9990454	-1.4527008	-2.0382746
0.4	-0.6909481	-0.7984205	5.7922835	5.7762008
0.5	0.0899183	0.0064331	8.2875369	9.2193626
0.6	0.7703733	0.8064183	4.3010714	5.6854946
0.7	0.8304148	0.9961222	-2.8384835	-2.1510423
0.8	0.2485679	0.4319806	-7.5071993	8.3597134
0.9	-0.5014747	-0.4590752	-6.2083752	-8.2419199
1	-0.8354019	-1.0027121	-0.1804002	-1.8868058

كيفية استخدام برنامج ماتلاب للحصول على النتائج العددية في المثال 2.2.

يتم كتابة هذه الخوارزمية في الفورم ITORED والظغط على Run .

```
f1=input('inter f1')
f2=input('inter f2')
x0=input('inter x0')
y0=input('inter y0')
z0=input('inter z0')
h=input('inter h')
xend=input('inter xend ')
x(1)=x0;y(1)=y0; z(1)=z0;
nmax=ceil((xend-x0)/h);
for n=1:nmax
    x(n+1)=x0+n*h;
k1= f1(x(n),y(n),z(n));
k11=f2(x(n),y(n),z(n));
k2= f1
(x(n)+h/3,y(n)+k1*h/3,z(n)+k11*h/3);
k22=
f2(x(n)+h/3,y(n)+k1*h/3,z(n)+k11*h/3);
k3= f1
(x(n)+h/3,y(n)+2*k2*h/3,z(n)+2*k22*h/3);
k33=
f2(x(n)+h/3,y(n)+2*k2*h/3,z(n)+2*k22*h/3
);
y(n+1)=y(n)+(1/4)*h*(k1+3*k3);
z(n+1)=z(n)+(1/4)*h*(k11+3*k33);
format long
yexact(n+1)=cos(9*x(n+1))-
2/9*sin(9*x(n+1));
zexact(n+1)=-2*cos(9*x(n+1))-
9*sin(9*x(n+1));
```

```
fprintf('yn(%.2f)= %.10f\n %.10f\n
',x(n+1), y(n+1),  yexact(n+1));
fprintf('zn(%.2f)= %.10f\n %.10f\n\n
',x(n+1), z(n+1),zexact(n+1));
end
```

سـوف يظهر لنا في الفورم Command Window

inter f1@(x,y,z)z

f1 =

@(x,y,z)z

inter f2@(x,y,z)-81*y

f2 =

@(x,y,z)-81*y

inter x00

x0=

0

inter y01

y0=

1

inter z0-2

z0=

2-

inter h0.1

h=

0.100000000000000

inter xend 1

xend=

1

yn(0.10)= 0.4220000000

0.4475373217

zn(0.10)= -8.1965000000

8.2931621232-

yn(0.20)= -0.4579072500

0.4436126793-

zn(0.20)= -7.8336605000

8.3102244885-

yn(0.30)= -0.9500664470

0.9990454487-

zn(0.30)= -1.4527008504

2.0382746381-

yn(0.40)= -0.6909481595

0.7984205400-

zn(0.40)= 5.7922835549

5.7762008223

yn(0.50)= 0.0899183726

0.0064331156

zn(0.50)= 8.2875369949

9.2193626578

yn(0.60)= 0.7703733817

0.8064183176

zn(0.60)= 4.3010714344

5.6854946361

yn(0.70)= 0.8304148412

0.9961222141

zn(0.70)= -2.8384835957

2.1510423771-

yn(0.80)= 0.2485679995

0.4319806781

zn(0.80)= -7.5071993244

8.3597134037-

yn(0.90)= -0.5014747819

0.4590752228-

zn(0.90)= -6.2083752865

8.2419199901-

yn(1.00)= -0.8354019575

1.0027121475-

zn(1.00)= -0.1804002363

1.8868058434-

الفصل الثالث

3 مقدمة

من الفصل السابق لاحظنا أنه عند تطبيق طريقة رونج كوتا على مسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية فإننا نحتاج إلى الكثير من العمليات الحسابية لإيجاد الحل، وذلك لأنه يتم تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية إلى معادلتين من الرتبة الأولى. لهذا في هذا الفصل سيتم التقليل من العمليات الحسابية وذلك بإيجاد حل مسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية مباشرة دون الحاجة إلى تخفيض رتبة المعادلة ولتغلب على هذه المشكلة سيتم دراسة طريقة رونج كوتا نيستروم.

1.3 طرق رونج كوتا نيستروم

Runge Kutta Nystrom Methods (RKN)

ومن أشهر الطرق المستخدمة لحل هذا النوع من المسائل طرق رونج- كوتا- نيستروم أو طرق نيستروم حيث قام العالم نيستروم عام 1925 بتعديل الصيغة العامة لطرق RK بحيث يتم الحصول على الحلول العددية لمسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية دون اللجوء إلى تخفيض الرتبة[4].

الصورة العامة لطرق رونج- كوتا- نيستروم من المرحلة s لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \quad a \le x \le b$$

هي:

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hy'_n + h^2 \sum_{i=1}^{s} b_i\, k_i \\ y'_{n+1} &= y'_n + h \sum_{i=1}^{s} d_i\, k_i \\ k_i &= f\left(x_n + c_i h, y_n + c_i h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, k_j \right) \end{aligned}\right\} (1)$$

مع تحقق شرط الصف $\frac{1}{2}c_i^2 = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ ; (i = 1,2,\dots,s)$

يمكن كتابة طرق RKN بصيغة بوتشر (Butcher) كما يأتي:

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s \\
 & d_1 & d_2 & \dots & d_s
\end{array}
$$

أو بصورة مختصرة

$$
\begin{array}{c|c}
\mathrm{C} & \mathrm{A} \\
\hline
 & \mathrm{b}^T \\
 & d^T
\end{array}
$$

حيث $b = [b_1, b_2, \cdots, b_s]^T$, $d = [d_1, d_2, \cdots, d_s]^T$, $A = [a_{ij}]$ $.c = [c_1, c_2, \cdots, c_s]^T$

إذا كانت $a_{ij} = 0$ لكل $j = 1,2, \dots, s$, $j \geq i$ فإن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ تكون مثلثية سفلية وتسمى الطرق في هذه الحالة طرق رونج - كوتا - نيستروم الصريحة اما إذا كانت $a_{ij} \neq 0$ لبعض $j > i$ حيث $j = 1,2, \dots, s$ فتسمى في هذه الحالة طرق رونج كوتا نيستروم الضمنية وسنتناول في هذا العمل طرق رونج - كوتا - نيستروم الصريحة فقط.

2.3 شروط الرتبة لطرق RKN

The Order Condition for RKN Methods

شروط الرتبة لطرق RKN يمكن الحصول عليها بمقارنة الصيغة (1) مع الحدود $(s + 1)$ من متسلسلة تايلور للدوال $\mathrm{y}(\mathrm{x}_{n+1}),\ \mathrm{y}'(\mathrm{x}_{n+1})$.

إذا كان لدينا طرق RKN من المرحلة الثالثة معرفة على الصيغة:

0	0		
c_2	a_{21}	0	
c_3	a_{31}	a_{32}	0
	b_1	b_2	b_3
	d_1	d_2	d_3

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h y'_n + h^2 a_{21} k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + c_3 h y'_n + h^2 (a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$
$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + h^2 (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) \qquad (2)$$
$$y'_{n+1} = y'_n + h(d_1 k_1 + d_2 k_2 + d_3 k_3) \qquad (3)$$

ولتحديد قيمة الوسيطات(A, c, b, d) نتبع الآتي:

مفكوك تايلور لـدوال y'_{n+1} ، y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + O(h^4) \qquad (4)$$
$$y'_{n+1} = y'_n + h y''_n + \frac{h^2}{2} y'''_n + \frac{h^3}{3!} y_n^{(4)} + O(h^4) \qquad (5)$$

حيث

$$y'' = f(x, y)$$
$$y''' = f'(x, y) = f_x + f_y y'$$
$$y^{(4)} = f''(x, y) = f_{xx} + 2y' f_{xy} + (y')^2 f_{yy} + f f_y$$

بالتعويض عن المشتقات في المعادلتين (4) و(5) نحصل على:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} f + \frac{h^3}{6}\left(f_x + f_y y'\right) \qquad (6)$$
$$y'_{n+1} = y'_n + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y y'\right) + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2y' f_{xy} + (y')^2 f_{yy} + f f_y\right) + O(h^4) \qquad (7)$$

بإيجاد مفكوك تايلور لـ k_2 , k_3 , مع إهمال الحدود التي تكون فيها القوى h أكبر من 4 نحصل على:

$$k_2 = f + c_2 h f_x + (c_2 h y'_n + h^2 a_{21} f) f_y + \frac{1}{2}\left(c_2 h \frac{\partial}{\partial x} + (c_2 h y'_n + h^2 a_{21} k_1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{1}{3!}\left(c_2 h \frac{\partial}{\partial x} + (c_2 h y'_n + h^2 a_{21} k_1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \cdots$$

$$= f + \left(c_2 f_x + c_2 y' f_y\right)h + \left(\tfrac{1}{2}c_2^2 f_{xx} + c_2^2 y' f_{xy} + a_{21} f f_y + \tfrac{1}{2}c_2^2 (y')^2 f_{yy}\right)h^2$$
$$+ \left(\tfrac{1}{6}c_2^3 f_{xxx} + \tfrac{1}{2}c_2^3 (y')^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{2}c_2^3 y' f_{yxx} + a_{21} c_2 y' f f_{yy}\right.$$
$$\left. + a_{21} c_2 f f_{xy} + \tfrac{1}{6}c_2^3 (y')^3 f_{yyy}\right)h^3$$

$$k_3 = f + c_3 h f_x + (c_3 h y_n' + h^2(a_{31} f + a_{32} k_2) f_y$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(c_3 h \frac{\partial}{\partial x} + (c_3 h y_n' + h^2(a_{31} f + a_{32} k_2)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(c_3 h \frac{\partial}{\partial x} + (c_3 h y_n' + h^2(a_{31} f + a_{32} k_2)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \cdots$$
$$= f + \left(c_3 f_x + c_3 y' f_y\right)h$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2}c_3^2 f_{xx} + c_3^2 y' f_{xy} + (a_{31} + a_{32}) f f_y + \tfrac{1}{2}c_3^2 (y')^2 f_{yy}\right)h^2$$
$$+ \left(\tfrac{1}{6}c_3^3 f_{xxx} + c_3 y' f f_{yy}(a_{31} + a_{32}) + c_3 f f_{xy}(a_{31} + a_{32})\right.$$
$$+ a_{32} c_2 y' {f_y}^2 + a_{32} c_2 f_x f_y + \tfrac{1}{2}c_3^3 (y')^2 f_{xyy}$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}c_3^3 y' f_{yxx} + \tfrac{1}{6}c_3^3 (y')^3 f_{yyy}\right)h^3$$
$$+ \cdots$$

بالتعويض عن k_1 , k_2 , k_3 في المعادلتين (2) و(3) نحصل على:

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + (b_1 f + b_2 f + b_3 f)h^2$$
$$+ \left(b_2\left(c_2 f_x + c_2 y' f_y\right) + b_3\left(c_3 f_x + c_3 y' f_y\right)\right)h^3 \qquad (8)$$

$$y_{n+1}' = y_n' + (d_1 f + d_2 f + d_3 f)h$$
$$+ \left(d_2\left(c_2 f_x + c_2 y' f_y\right) + d_3\left(c_3 f_x + c_3 y' f_y\right)\right)h^2$$
$$+ \left(d_2\left(\tfrac{1}{2}c_2^2 f_{xx} + c_2^2 y' f_{xy} + a_{21} f f_y + \tfrac{1}{2}c_2^2 (y')^2 f_{yy}\right)\right.$$
$$\left. + d_3\left(\tfrac{1}{2}c_3^2 f_{xx} + c_3^2 y' f_{xy} + (a_{31} + a_{32}) f f_y + \tfrac{1}{2}c_3^2 (y')^2 f_{yy}\right)\right)h^3$$
$$+ o(h^4) \qquad (9)$$

بمقارنة المعادلتين (6) -(8) نجد أن:

$$b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}(b_2\, c_2^2 + b_3\, c_3^2) = \frac{1}{24}$$

بمقارنة المعادلتين (7) -(9) نجد أن:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$d_2c_2 + d_3c_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(d_2\, c_2^2 + d_3\, c_3^2) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}(d_2\, c_2^3 + d_3\, c_3^3) = \frac{1}{24}$$

مما سبق يمكن استنتاج شروط الرتبة لطرق RKN إلى الرتبة الثالثة كالآتي:

شروط الرتبة بالنسبة y

الرتبة الثانية

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = \frac{1}{2}$$

الرتبة الثالثة

$$\sum_{i=1}^{s} b_i\, c_i = \frac{1}{6}$$

شروط الرتبة بالنسبة y'

الرتبة الأولى

$$\sum_{i=1}^{s} d_i = 1$$

الرتبة الثانية

$$\sum_{i=1}^{s} d_i\, c_i = \frac{1}{2}$$

الرتبة الثالثة

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} d_i\, c_i^2 = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1} d_i a_{ij} c_j = \frac{1}{24}$$

نظرا لما تلعبه الطرق العددية من رتب عليا من أهمية في الحصول على الحلول التقريبية لمسالة القيمة الابتدائية بأقل خطأ ممكن فإنه في هذا العمل سيتم فقط دراسة بعض طرق رونج – كوتا – نيستروم من الرتبة الثالثة RKN3 .

3.3 اشتقاق طرق RKN من الرتبة الثالثة

Derivation of Third Order RKN Methods

للحصول على طرق RKN3 فإنه يتطلب حل منظومة المعادلات الآتية حيث $(s = 3)$

$$b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{2},$$
$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{6},$$
$$d_1 + d_2 + d_3 = 1,$$
$$d_2 c_2 + d_3 c_3 = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}(d_2\, c_2^2 + d_3\, c_3^2) = \frac{1}{6},$$

مع تحقق شرط الصف $\frac{1}{2}c_2^2 = a_{21}, \frac{1}{2}c_3^2 = a_{31} + a_{32}$

وبالتالي نتحصل على منظومة تحتوي على خمس معادلات وتسعة مجاهيل لها عدد لانهائي من الحلول؛ لذلك يوجد أربع وسيطات اختيارية وليكن $b_3,\ c_2,\ c_3, a_{32}$ وبالتالي نكون قد تحصلنا على فئة لا نهائية من الطرق من الرتبة الثالثة والمرحلة الثالثة.

وفيما يلي صيغ مختلفة لطرق RK3:

الطريقة الأولى RKN31:

بوضع $a_{32} = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1, b_3 = \frac{1}{20}$ وحل منظومة المعادلات السابقة مع شرط الصف نتحصل على الطريقة الآتية :

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\
\hline
 & \frac{13}{60} & \frac{7}{30} & \frac{1}{20} \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h^2}{8}k_1\right)$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n + hy'_n + h^2(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + h^2\left(\frac{13}{60}k_1 + \frac{7}{30}k_2 + \frac{1}{20}k_3\right)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right)$$

الطريقة الثانية RKN32:

بوضع $a_{32} = \frac{3}{20}, c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = 1, b_3 = \frac{1}{6}$ وحل منظومة المعادلات السابقة مع شرط الصف

نتحصل على الطريقة الآتية:

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & 0 & \\
1 & \frac{7}{20} & \frac{3}{20} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0
\end{array}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}y'_n + \frac{2h^2}{9}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + h, y_n + hy'_n + h^2\left(\frac{7}{20}k_1 + \frac{3}{20}k_2\right)\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{6}(2k_1 + k_3)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2)$$

4.3النتائج العددية وكيفية استخدام برنامج ماتلاب للحصول على هذه النتائج [8-4]:

في هذا المحور سنناقش مدى فاعلية وكفاءة طرق RKN في حل مسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية مباشرة دون الحاجة إلى تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية. سنتناول تطبيق الطرق التي تم اشتقاقها على الأمثلة الآتية:

مثال1.3:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} = -81y(x); \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2; \quad 0 \le x \le 1$$

حيث الحل التحليلي $h = 0.1\,,\ y = \cos(9x) - \frac{2}{9}\sin(9x)$

الطريقة RKN31:

عندما $n = 0$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = f(0,1) = -81(1) = -81$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}y_n' + \frac{h^2}{8}k_1\right) = -64.698$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n + hy_n' + h^2(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2) = -36.3965$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy_0' + h^2\left(\frac{13}{60}k_1 + \frac{7}{30}k_2 + \frac{1}{20}k_3\right) \\ &= 1 + 0.1(-2) \\ &\quad + (0.1)^2\left(\frac{13}{60}(-81) + \frac{7}{30}(-64.698) + \frac{1}{20}(-36.3965)\right) \\ &= 0.45534 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_0' + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right) \\ &= -2 + 0.1\left(\frac{1}{6}(-81) + \frac{2}{3}(-64.698) + \frac{1}{6}(-36.3965)\right) = -8.2698 \end{aligned}$$

وبتطبيق برنامج ماتلاب الخاص بهذه الطريقة نحصل على النتائج في جدول:

يتم كتابة هذه الخوارزمية التالية في الفورم ITORED والضغط على Run .

```
clear
f=input('inter f ');
x0=0;%input('inter x0 ')
```

```
 y0=1;%input('inter y0 ')
yp0=-2;%input('inter yp0 ')
h=0.1;%input('inter h ')
xend=1;%input('inter xend ')
%a=0;b=1;
%h=0.1;
x(1)=x0;y(1)=y0; yp(1)=yp0;
nmax=ceil((xend-x0)/h);
for n=1:nmax
    x(n+1)=x0+n*h;
k1=f(x(n),y(n));
k2=f(x(n)+h/2,y(n)+h/2*yp(n)+k1*h*h/8);
k3=f(x(n)+h,y(n)+h*yp(n)+h*h*(k1/6+k2/3)
);
y(n+1)=y(n)+h*yp(n)+(1/60)*h*h*(13*k1+14
*k2+3*k3);
yp(n+1)=yp(n)+(1/6)*h*(k1+4*k2+k3);
yexact(n+1)=cos(9*x(n+1))-
2/9*sin(9*x(n+1));
%%ypexact(n+1)=-2*cos(9*x(n+1))-
9*sin(9*x(n+1));
 fprintf('yn(%.2f)= %.10f\n %.10f\n
%.10f\n',x(n+1), y(n+1),
yexact(n+1),abs(yexact(n+1)-
yexact(n+1)));
end
 figure(1)
 n=1:nmax+1;
 xx=0:0.02:1;
 yexact=cos(9*xx)-2/9*sin(9*xx);
plot(x,y,'r-*',xx, yexact)
%hold off
%legend('southwest')
```

```
legend('RKN31','exact','Location','north
west')
legend('boxoff')
 %end
```

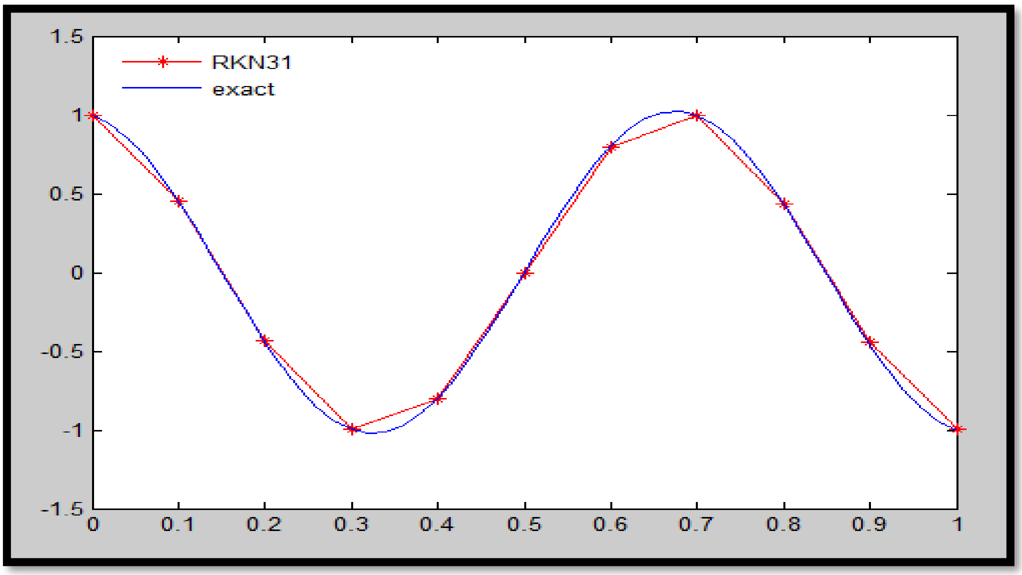
سـوف يظهر لنا في الفورم Command Window

```
<<e31
inter f @(x,y)-81*y
yn(0.10)= 0.4553380812
0.4475373217
0.0000000000
yn(0.20)= -0.4332598866
0.4436126793-
0.0000000000
yn(0.30)= -0.9933164039
0.9990454487-
0.0000000000
yn(0.40)= -0.8014860881
0.7984205400-
0.0000000000
yn(0.50)= -0.0035607177
0.0064331156
0.0000000000
yn(0.60)= 0.7963309845
0.8064183176
0.0000000000
yn(0.70)= 0.9931234118
0.9961222141
0.0000000000
yn(0.80)= 0.4385060158
0.4319806781
0.0000000000
yn(0.90)= -0.4473060417
0.4590752228-
0.0000000000
yn(1.00)= -0.9939542237
1.0027121475-
0.0000000000
```

الجدول(1.3) التالي يوضح النتائج العددية باستخدام برنامج ماتلاب .

جدول (1.3)يوضح النتائج العددية لحل مسائلة القيمة الابتدائية

RKN31			
x_n	الحل العددي y_n	الحل الفعلي $y(x_n)$	الخطأ المطلق $\lvert y_n - y(x_n)\rvert$
0.1	0.45533808	0.44753732	0.007800789
0.2	-0.43325988	-0.44361267	0.01035279
0.3	-0.993316403	-0.99904544	0.002861933
0.4	-0.80148608	-0.79842054	0.003065548
0.5	-0.00356071	0.00643311	0.009993833
0.6	0.79633098	0.80641831	0.010087333
0.7	0.99312341	0.99612221	0.002998802
0.8	0.43850601	0.43198067	0.006525337
0.9	-0.44730604	-0.45907522	0.011769181
1	-0.99395422	-1.00271214	0.008757923



شكل (1)

الطريقةRKN32:

يتم كتابة هذه الخوارزمية في الفورم ITORED والضغط على Run .

```
clear
f=input('inter f ');
x0=0;%input('inter x0 ')
 y0=1;%input('inter y0 ')
yp0=-2;%input('inter yp0 ')
h=0.1;%input('inter h ')
xend=1;%input('inter xend ')
%a=0;b=1;
%h=0.1;
x(1)=x0;y(1)=y0; yp(1)=yp0;
nmax=ceil((xend-x0)/h);
for n=1:nmax
    x(n+1)=x0+n*h;
k1=f(x(n),y(n));
k2=f(x(n)+2*h/3,y(n)+2*h/3*yp(n)+2*k1*h*
h/9);
k3=f(x(n)+h,y(n)+h*yp(n)+h*h*((7*k1/20)+
(3*k2/20)));
y(n+1)=y(n)+h*yp(n)+(1/6)*h*h*(2*k1+k3);
yp(n+1)=yp(n)+(1/4)*h*(k1+3*k2);
yexact(n+1)=cos(9*x(n+1))-
2/9*sin(9*x(n+1));
%%ypexact(n+1)=-2*cos(9*x(n+1))-
9*sin(9*x(n+1));
 fprintf('yn(%.2f)= %.10f\n %.10f\n
%.10f\n',x(n+1), y(n+1),
yexact(n+1),abs(yexact(n+1)-
yexact(n+1)));
end
 figure(1)
 n=1:nmax+1;
```

```
 xx=0:0.02:1;
 yexact=cos(9*xx)-2/9*sin(9*xx);
plot(x,y,'r-*',xx, yexact)
%hold off
%legend('southwest')
legend('RKN32','exact','Location','north
west')
legend('boxoff')
 %end
```

Command Window سـوف يظهر لنا في الفورم

```
<<e32new
inter f @(x,y)-81*y
yn(0.10)= 0.4715355500
0.4475373217
0.0000000000
yn(0.20)= -0.4130074494
0.4436126793-
0.0000000000
yn(0.30)= -0.9836801207
0.9990454487-
0.0000000000
yn(0.40)= -0.8090600304
0.7984205400-
0.0000000000
yn(0.50)= -0.0224000965
0.0064331156
0.0000000000
yn(0.60)= 0.7800509708
0.8064183176
0.0000000000
```

yn(0.70)= 0.9909739095

0.9961222141

0.0000000000 yn(0.80)= 0.4516152098

0.4319806781

0.0000000000

yn(0.90)= -0.4287302191

0.4590752228-

0.0000000000

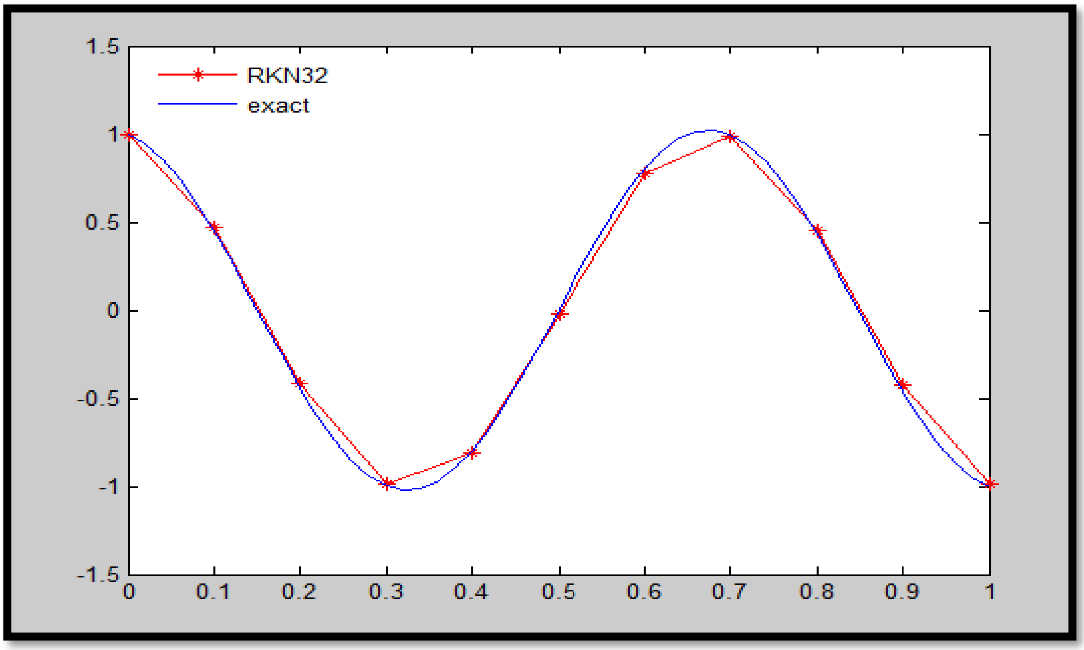
yn(1.00)= -0.9833125051

1.0027121475-

الجدول(2.3) التالي يوضح النتائج العددية باستخدام برنامج ماتلاب .

جدول (2.3)يوضح النتائج العددية لحل مسائلة القيمة الابتدائية في المثال 2.3.

RKN32			
x_n	الحل العدديy_n	الحل الفعلي$y(x_n)$	الخطأ المطلق $\lvert y_n - y(x_n)\rvert$
0	1	1	0
0.1	0.471535550	0.447537321	0.239982283
0.2	-0.413007449	-0.443612679	0.030605229
0.3	-0.983680120	-0.999045448	0.015365328
0.4	-0.809060030	-0.798420540	0.010639490
0.5	-0.022400096	0.006433115	0.015966980
0.6	0.780050970	0.806418317	0.026367346
0.7	0.990973909	0.996122214	0.005148304
0.8	0.451615209	0.431980678	0.019634531
0.9	-0.428730219	-0.459075222	0.030345003
1	-0.983312505	-1.002712147	0.019399642



شكل(2)

الاستنتاجات :

من خلال النتائج العددية المتحصل عليها في هذا الفصل نستنتج الآتي:

- سهولة تطبيق طرق RKN على مسالة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية دون الحاجة إلى اختزال رتبة المعادلة التفاضلية كما في طرق RK، مما وفر الوقت والجهد لحل المسألة.
- الكفاءة العالية لطرق RKN في حل مسألة القيمة الابتدائية وتأتي ذلك من خلال النتائج العددية المتحصل عليها من تطبيق الطرق على أمثلة مختلفة.
- كلما زادت رتبة الطريقة قل مقدار الخطأ.

التوصيات :

توصي الباحثة باشتقاق طرق من رتب عليا (أعلى من الرتبة الثالثة) كذلك دراسة الاستقرار لطرق RKN.

المراجع :

[1] ه. م. ا. القاضي, مقارنة بين حلول المعادلات التفاضلية الخطية: جامعة سبها, 2017-2018.

[2] D. Faires, Burden, ر. م. جهيمة, ك. أ. أبودية, التحليل العددي: ELGA, 2001.

[3] س. م. فضيلة , ا. م. الرويعي, التحليل العددي للمهندسين, الطبعة الأولى, مكتب البحوث والإستشارات الهندسية كلية الهندسة جامعة الفاتح 2004/2005.

[4] ا. م. ع. اشتيوي , ل. م. إ. أبوسكساكة, طرق رونج كوتا نيستروم لحل مسألة القيمة الإبتدائية من الرتبة التانية: جامعة مصراتة /كلية العلوم, 2020/2021.

[5] ز. ع. القاضي, التطبيقات الرياضية والهندسية باستخدام ماتلاب مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع, 2013.

[6] خ. ع. الهندي, مقدمة في البرمجة بالماتلاب: جامعة أم القرى, 2007.

[7] أ. أ. بحبوح, ماتلاب لغة المهندسين المهندسين: دار الكتب العلمية للنشروالتوزيع, 2005.

[8] ز. ع. الشقماني , س. ر. ارفيدة, " خوارزمية رونج كوتا من رتب عليا," المجلة العلمية لكلية التربية,جامعة مصراتة, 2019.