وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION&SCIENTIFIC RESEARCH

# جامعة سبها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

بحث مقدم لإستكمال متطلبات الحصول على الدرجة الجامعية الأولى (البكالوريوس) في الرياضيات بعنوان :

# تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى


إعداد الطالبة :

وصايف محمد عبد القادر إبراهيم

تحت إشراف :

الأستاذة : نزهة امحمد الحاج


العام الجامعي : 2017 – 2018 م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ ۞ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ ۞ مَلِكِ يَوْمِ الدِّينِ ۞

إِيَّاكَ نَعْبُدُ وَإِيَّاكَ نَسْتَعِينُ ۞

اهْدِنَا الصِّرَاطَ الْمُسْتَقِيمَ ۞ صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ

عَلَيْهِمْ غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّالِّينَ ۞

سورة الفاتحة

# المقدمة

الحمد لله القوي المتين القاهر الظاهر الملك الحق المبين احمده حمد الشاكرين , وأسأله معونة الصابرين ، وأشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له في الأولين والآخرين ، وأشهد أن محمداً عبده ورسوله المصطفى على العالمين .

من أهم فروع الرياضيات قديماً وحديثاً هو فرع المعادلات التفاضلية وقد كانت بداية استخدامها في العلوم الطبيعية وذلك لأن قوانين الفيزياء والكيمياء تكون عادة مرتبطة بعدد محدود من المتغيرات المعروفة ومع مرور الزمن اتسع نطاق استخدام المعادلات التفاضلية ليشمل علوم أخرى مثل علم الحياة وعلم الاقتصاد والهندسة بفروعها المختلفة ولهذا تعتبر المعادلات التفاضلية من أهم العلوم الرياضية التي لا غنى عنها في مختلف العلوم التطبيقية .

يتضمن هذا البحث فصلان :

**الفصل الأول :** خُصص هذا الفصل لعرض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي نحتاج لها في الفصل الثاني مثل :

تعريف المعادلة التفاضلية وتصنيفها من حيث الدرجة والرتبة ، ومفهوم الحل العام والحل الخاص ، وتكوين المعادلات التفاضلية ، والشروط الابتدائية والشروط الحدية ودراسة بعض طرق المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الأولى .

**الفصل الثاني** : خُصص هذا الفصل لدراسة بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى وذلك من خلال دراسة التطبيقات الآتية : **المسارات المتعامدة** و في هذا الموضوع تطرقنا لدراسة إيجاد ميل مجموعة المنحنيات ومعادلة المسار العمودي [4] ,[7]

ولإيجاد عائلة المنحنيات المائلة استخدمنا **المسارات المائلة** [7] ، أما بالنسبة **لمسائل النمو و الاضمحلال** تطرقنا إلى دراسة كمية المادة التي إما أن تكون نامية أو مضمحلة ، ومعدل التغير الزمني لهذه الكمية من المادة تكون متناسبة لكمية المادة الموجودة [1] ,[4] ,[5] ، بينما في **مسائل درجة الحرارة** درسنا قانون نيوتن للتبريد الذي يطبق تماماً في التسخين [2] ,[4]

أما في **حركة الأجسام** درسنا حركة الأجسام المقذوفة إلى أعلى و إلى أسفل[7].

# الفصل الأول

# تعاريف ومفاهيم أساسية على المعادلات التفاضلية

## (1 – 1) مفاهيم أساسية :

**تعريف (1–1–1) : المعادلة التفاضلية(Differential Equation)**

هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن $x$ ومتغير تابع وليكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية ... , $y', y''$ أي أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0 \qquad (1-1)$$

وهذه المعادلة تسمى **معادلة تفاضلية عادية** .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن $x, y$مستقلان , وكان $Z(x, y)$ , متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من $x, y$ جزئياً , سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة و المتغير التابع و مشتقاته الجزئية , **معادلة تفاضلية جزئية** ، وهي على الصورة :

$$G(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots) = 0$$

**أمثلة :**

(1
$$\frac{dy}{dx} - x\sin x = y$$

(2
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$$

المعادلة (1) تسمى **معادلة تفاضلية عادية** , بينما المعادلة (2) تسمى **معادلة تفاضلية جزئية.**

**تعريف (1−1−2) : رتبة المعادلة التفاضلية (order of differential Equation)**

هي أعلى درجة اشتقاق للمتغير المستقل في المعادلة التفاضلية .

**تعريف (1−1−3): درجة المعادلة التفاضلية ( Degree of Differential Equation)**

هي أعلى أس ترفع إليه أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

**من الأمثلة السابقة :**

المعادلة التفاضلية (1) هي **معادلة تفاضلية عادية** من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى .

المعادلة التفاضلية (2) هي **معادلة تفاضلية جزئية** من الرتبة الثانية و الدرجة الأولى .

**تعريف (1-1-4) : حل المعادلة التفاضلية (Solution Of Differential Equation)**

تسمى الدالة $y = y(x)$ **حلاً للمعادلة التفاضلية** $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ إذا كانت :

(1) قابلة للاشتقاق $n$ من المرات .

(2) تحقق المعادلة التفاضلية أي أن $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$.

**تعريف (1-1-5) : الحل العام ( General Solution)**

**الحل العام** لمعادلة تفاضلية من الرتبة $n$ هو حل يحتوي على $n$من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

**مثال :**

الحل العام للمعادلة $y''' - 5y'' + 6y = 0$ يكون :

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

**تعريف (1-1-6) : الحل الخاص (Particular Solution)**

هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يشتمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة .

**تعريف (1-1-7) : الحل الشاذ (المنفرد) (Singular solution)**

**الحل الشاذ** للمعادلة التفاضلية هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يمكن أن يستنتج من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية .

## (1-2) تكوين المعادلة التفاضلية (Formation Differential Equation)

## (1-3) الشروط الابتدائية و الشروط الحدية : (Initial Conditions and Boundary Conditions)

## (4–1) معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى

## (Differential Equations of the First order and Degree)

أي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

### (1–4–1) طريقة فصل المتغيرات (Separation of Variables)

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة :

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

### (2–4–1) المعادلة التفاضلية المتجانسة (Homogeneous of Differential Equation)

يقال أن المعادلة التفاضلية $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

متجانسة إذا كان كل من $M$ , $N$ دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x, y)$ دالة متجانسة من درجة $n$ إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \qquad , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

## (3−4−1) المعادلة التفاضلية الخطية (Linear Differential Equation)

**تعريف (3−4−1):** يقال بأن المعادلة التفاضلية بأن خطية فقط إذا كان متغيرها المستقل $y$ ومشتقة من الدرجة الأولى الصورة العامة لمثل هذه المعادلات التفاضلية هي :

$$\frac{dy}{dx} + py = Q$$

# الفصل الثاني

# تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

## (1–2) : المسارات المتعامدة (orthogonal trajectories)

إذا كان لدينا مجموعة من المنحنيات $f(x,y,c)=0 \ldots \qquad (1-1)$

فإن المنحنى (المنحنيات) الذي يقطع تلك المنحنيات على التعامد يسمى مساراً (مسارات) متعامداً ، حيث يصنع ذلك المسار مع كل منحنى من المجموعة (1–1) زاوية قائمة للحصول على معادلة ذلك المسار ، نتبع الخطوات الآتية :

1–نوجد مشتقة الطرفين للمعادلة (1–1) بالنسبة إلى $x$ ، نحصل على المعادلة

$$G(x,y,y',c)=0 \qquad (1-2)$$

2– بحذف $c$ من المعادلتين (1–1) و (1–2) نحصل على

$$y'=f(x,y) \qquad (1-3)$$

حيث تمثل $f(x,y)$ ميل مجموعة المنحنيات (1–1)

3– يكون ميل المسار العمودي $\frac{-1}{f(x,y)}$ ، وعلى ذلك فإن المعادلة التفاضلية للمسار العمودي

$$y'=\frac{-1}{f(x,y)}$$

وذلك في حالة الإحداثيات الكارتيزية

4– بحل المعادلة التفاضلية ، نحصل على معادلة المسار العمودي على الصورة

$$g(x,y,\alpha)=0 \qquad (1\text{–}4)$$

## (2-2)المسارات المائلة(isogonal (oblique) trajectories)

نفرض إن لدينا الدالة $y = f(x,c)$ وتمثل عائلة من المنحنيات في منطقة D من المستوى $xy$ وأن $p(x,y)$ هي نقطة بها احد منحنيات العائلة ويكون له مماس محدد عند هذه النقطة ونفرض انه توجد عائلة أخرى من المنحنيات بحيث يمر احد منحنياتها بالنقطة السابقة $p(x,y)$ بحيث يصنع زاوية مقدارها $\theta$ مع مماس المجموعة الأولى ففي هذه الحالة نقول إن المجموعة الثانية من المنحنيات تكون مسارات مائلة مع منحنيات المجموعة الأولى ولإيجاد المسارات المائلة على عائلة المنحنيات .

$$y = f(x,c) \qquad (2-1)$$

**أولاً :** نفاضل المعادلة (2−1) بالنسبة للمتغير $x$ ونحذف الثابت $c$ ونكون المعادلة التفاضلية .

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2-2)$$

**ثانياً :** نستبدل ميل المجموعة الأولى (2−2) بميل المجموعة المائلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y) + \tan\theta}{1 - f(x,y)\tan\theta} \qquad (2-3)$$

**ثالثاً :** نحل المعادلة التفاضلية (2−3)

**(3−2) مسائل النمو والاضمحلال (Growth and Decay):**

لترمز $N(t)$ لكمية المادة أو (مجموع السكان ) التي إما أن تكون نامية أمضمحلة ، إذا فرضنا أن $dN/dt$ (هو معدل التغير الزمني لهذه الكمية من المادة ) تكون متناسبة لكمية المادة الموجودة ، فإن $dN/dt = kN$ أو

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \qquad (3-1)$$

حيث $k$ هو ثابت التناسب .

**(4−2) مسائل درجة الحرارة (Temperature Problems) :**

ينص قانون نيوتن للتبريد والذي ينطبق تماماً في التسخين على أن " معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب مع الفرق في درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به " .

لتكن $T$هي درجة حرارة الجسم و $T_m$ درجة حرارة الوسط المحيط به فإن معدل التغير الزمني حرارة الجسم تكون$dT/dt$، ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد على الصورة

$$dT/dt = -k(T - T_m) \qquad (4\text{−}1)$$

**(5−2) حركة الأجسام :**

# الخاتمة

وفي نهاية مطاف هذا البحث المتواضع أقول : هذا ما منّه الله به علي ، ثم ما وسعه من جهد ، وسمح به الوقت ، وتوصل إليه الفهم المتواضع ، فإن أصبت فمن الله ، و إن أخطأت فمن نفسي والشيطان وأستغفر الله ، وحسبي إنني قد حاولت التسديد وبذلت الجهد ما استطعت إلى ذلك سبيلاً .

أسأل الله العظيم بمنّه وفضله أن يجعل هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم ، و أن ينفعني بذلك ، و أن ينفع به إنه على ذلك قدير وبالإجابة جدير .

وصلى الله على نبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم