1-1 تمهيد:-

يعتبر توزيع تي (Student-t distribution) أحد توزيعات المعاينة الهامة والتي لها تطبيقات واسعة في الإحصاء الاستنتاجي وخصوصا عندما يكون حجم العينة صغير. يرجع الفضل في استنتاج هذا التوزيع للعالم الايرلندي William Sealy Gosset 1908 عندما نشر بحثه الذي اشتق فيه هذا التوزيع تحت اسم Student وبذلك عرف باسم Student-t . إن توزيع t يشبه التوزيع الطبيعي هو أيضاً جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي صفر ولكنه مفرطح أو أكثر انبساطاً من التوزيع الطبيعي وبالتالي فجزء أكبر من مساحته يقع عند الأطراف وأن توزيع t مختلفاً لكل حجم عينة n ولكن مع تزايد n فإن توزيع t يقترب من التوزيع الطبيعي حتى يتساويا تقريباً .

2-1 أهداف البحث: تسعي الدراسة الحالية لتحقيق الأهداف التالية:

1. التعريف بتوزيع تي ودراسة بعض خصائصه النظرية
2. بيان كيفية استخدام توزيع تي في اختبار حول متوسط واحد
3. بيان كيفية استخدام توزيع تي في اختبار الفرق بين متوسطين لعينتين مستقلتين
4. بيان كيفية استخدام توزيع تي في اختبار الفرق بين متوسطين لعينتين غير مستقلتين
5. بيان كيفية استخدام توزيع تي في تكوين فترات الثقة لمتوسط واحد
6. بيان كيفية استخدام توزيع تي في تكوين فترات الثقة للفرق بين متوسطين لعينتين مستقلتين
7. بيان كيفية استخدام توزيع تي في تكوين فترات الثقة للفرق بين متوسطين لعينتين غير مستقلتين
8. بيان كيفية استخدام برنامج R في إيجاد فترات الثقة واختبارات الفروض لتوزيع تي

3-1 أهمية البحث: تكمن أهمية هذا البحث في التعرف علي أحد توزيعات المعاينة المهمة وهو توزيع تي والذي له استخدامات واسعة للتعرف علي خصائصه النظرية وكيفية استخدامه في التعامل مع اختبارات الفروض وتكوين فترات الثقة من حيث كيفية اختيار الصيغة المناسبة لعينة واحدة مجهولة التباين وكذلك لعينتين مستقلتين ومرتبطتين لعينة الدراسة فضلا عن إكساب مهارة استخدام البرنامج الإحصائي R وقراءته وتفسير نتائجه.

4-1 أقسام البحث: يتكون هذا البحث من أربع فصول مقسمة علي النحو التالي:

الفصل الأول: هذا الفصل يتناول مقدمة عامة عن توزيع تي بالإضافة الي أهمية الدراسة، أهدافها وأقسام البحث.

الفصل الثاني: يتناول هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية مثل معني الفرضية الإحصائية، إحصائي الاختبار، ومستوي الثقة وغيرها من المفاهيم الأساسية بالإضافة الي الاشتقاق الرياضي لتوزيع تي واستخداماته التي سيتم استخدامها في الفصل الثالث عند تطبيقه في إيجاد فترات الثقة واختبارات الفروض باستخدام برنامج R

الفصل الثالث: تطبيق عملي باستخدام برنامج R

الفصل الرابع: يحتوي على الاستنتاجات وتوصيات هذا البحث.

1.2 تمهيد:

يهتم هذا الفصل بالتعريف بتوزيع تي وخصائصه النظرية واستخداماته ولكن قبل التطرق الي هذا التوزيع لابد من تقديم بعض المفاهيم الأساسية التي تشكل الركيزة الأساسية للاستدلال الإحصائي التي تمكننا من استخدامه وفهمه في الموضوعات اللاحقة سواء في الجانب النظري أو التطبيقي.

2.2 الاستدلال الإحصائي: يعتبر الاستدلال الإحصائي واحد من أكثر جوانب عملية اتخاذ القرارات أهمية وحيوية في الاقتصاد والأعمال والعلوم. ويتعلق الاستدلال الإحصائي بالتقدير واختبارات الفروض.

التقدير : هو عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري) من **الإحصاء** المناظر والخاص بعينة مسحوبة من المجتمع. أما اختبارات الفروض فهو تحديد ما إذا كنا نقبل أو نرفض فرضاً ما عن معلمة على ضوء معلومات العينة.

ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفروض، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

3.2 توزيع المعاينة للمتوسط

إذا أخذنا عينات متكررة من مجتمع ما وقمنا بقياس متوسط لكل عينة ، فإننا نجد أن معظم هذه المتوسطات $\overline{X}_S$ ، تختلف عن بعضها البعض ، ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات "توزيع المعاينة للوسط" .

وهناك نظريتان هامتان بين توزيع المعاينة للوسط والمجتمع الأصلي.

نظرية 1- إذا أخذنا عينات متكررة حجمها n من مجتمع ما :

$$\mu_{\overline{X}} = \mu \qquad (1)$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{or} \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (2)$$

نظرية 2- مع تزايد حجم العينات (أي عندما $n \to \infty$) فإن توزيع المعاينة للمتوسط يقترب من التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن شكل المجتمع الأصلي . ويعتبر التقريب جيداً عندما تكون $n \geq 30$. هذه هي نظرية النهاية (الغاية) المركزية .

و لكى يكون التقدير (واختبار الفروض) سليما، ينبغي أن يبنى على عينة ممثلة للمجتمع. ويمكن تحقيق ذلك بالمعاينة العشوائية حيث يكون لكل مفردة في المجتمع فرصة متكافئة للدخول في العينة.

4.2 الفرضية الإحصائية: Statistical Hypothesis : هي جملة تعني ادعاء أو زعم معين حول التوزيع الاحتمالي وغالبا ما يكون حول معلمة من معلمات المجتمع الإحصائي. هناك نوعان من الفرضيات.

- **النوع الأول: الفرضية الصفرية: The Null Hypothesis**

هي الفرضية التي نضعها ونأمل ان نرفضها أ بمعني هي الفرضية التي تبني علي أمل ان يتخذ قرار بعدم صحتها. ونعبر عن ذلك بالرمز H_0.

- **النوع الثاني: الفرضية البديلة** : **The Alternative Hypothesis**

هي الفرضية التي نقبلها عند رفض الفرضية الصفرية. ونعبر عن ذلك بالرمز H_1.

وتصاغ عادة الفرضية الاحصائية في صورة عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية، أو عدم وجود أثر ذو دلالة إحصائية، وتسمي هذه الفرضية بفرضية العدم (Null Hypothesis) ويرمز لها بالرمز(H_0)،ويطلق عليها احيانا بالفرضية الصفرية، ويقصد بكلمة(Null) هي عدم وجود فرق بين معلمة المجتمع (μ) والقيمة المفترضة، أي أن $(\mu = \mu_0)$ وإن الادعاء غير صحيح وفرضية العدم هي الفرضية التي نتمسك بها ولا نرفضها إلا في حالة توفر دلائل قوية من واقع العينة تقود إلى رفضها.

الاختبار :Test هو اسلوب إحصائي نريد به التأكد من صحة الفرضية أو عدم صحتها.

اختبار الفرضية Test of hypotheses: يعني البحث عما يدعم هذا الادعاء أو ما ينفيه مما يؤدي غالبا إلى ترجيح قبول الادعاء أو رفضه

قاعدة الاختبار: هي الطريقة المستخدمة لقبول او رفض فرضية العدم.

المنطقة الحرجة Rejection Region: هي المنطقة التي إذا وقع فيها احصائي الاختبار يتم رفض فرضية العدم.

القيم الحرجة (The critical value): هي القيم التي تفصل بين منطقة القبول ومنطقة الرفض تحسب وفق مستوى المختارة لهذا الاختبار على النحو التالي: α المعنوية.

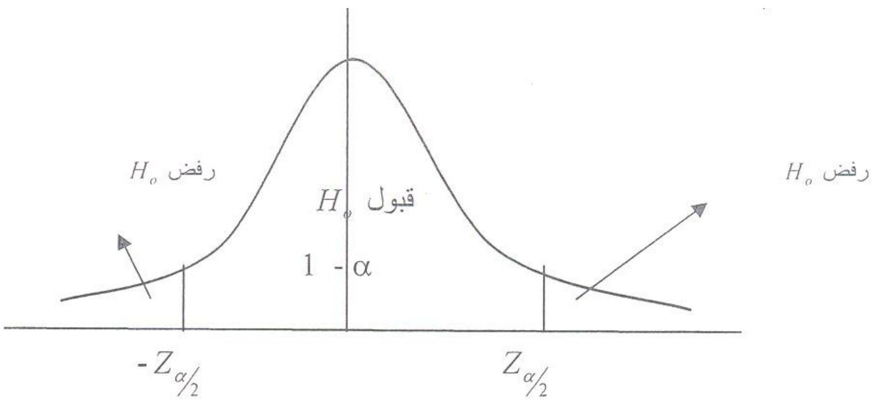
منطقة القبول Acceptance Region: هي المنطقة التي إذا وقع فيها احصائي الاختبار يتم قبول فرض العدم.

منطقة الرفض Rejection Region: هي المنطقة التي إذا وقع فيها احصائي الاختبار يتم رفض فرض العدم.

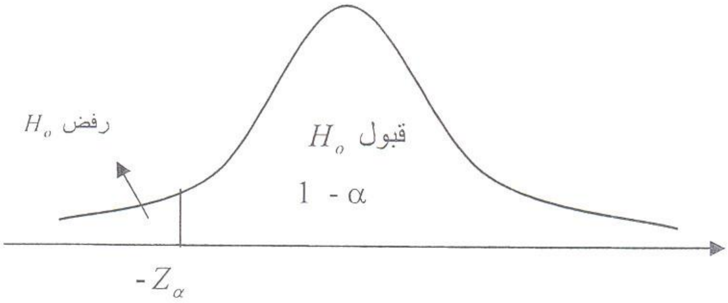
والأشكال التالية يمكن من خلالها توضيح مناطق الرفض والقبول وذلك حسب نوع الفرض البديل

1- **الاختبار من طرفين**: يسمى الاختبار الإحصائي اختباراً ذا طرفين إذا كان على الصورة:

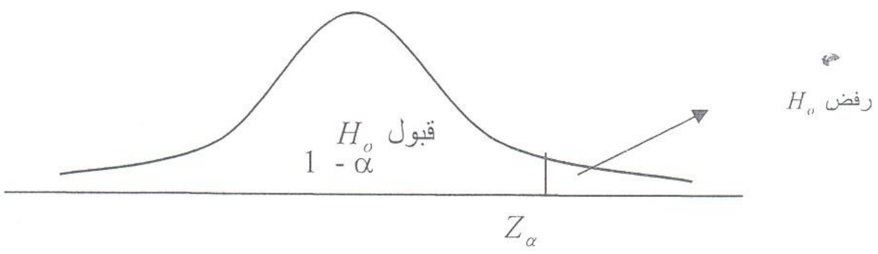
$$\mu = \mu_0$$



2- **الاختبار من طرف واحد أدنى**: يسمى الاختبار الإحصائي اختباراً ذا طرف واحد أدنى إذا كان على الصورة:



3- **الاختبار من طرف واحد أعلى**: يسمى الاختبار الإحصائي اختباراً ذا طرف واحد أعلى إذا كان على الصورة:



احصائي الاختبارTest statistic: هو متغير عشوائي له توزيع احتمالي معلوم ، ويستخدم لوصف العلاقة بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة من العلاقة.

مستوى المعنوية Level of significance:هو احتمال رفض فرض العدم (H_0)عندما يكون هذا الفرض صحيح، وبمعنى أخر، هو: (احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول) ويرمز له بالرمز(∝).

قوة الاختبارPower of Test : هي احتمال رفض فرض العدم (H_0) عندما يكون فرض العدم خاطئ ويتضح لنا كلما كان احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني (β) قليل كلما زادت قوة الاختبار(1-β)،وهذا يعني زيادة رفض العدم (H_0) عندما يكون فرض العدم خاطئ.

فترات الثقة: الفترة: هي مجموعة القيم التي تقع بين قيمتين ويقصد هنا بالفترة التي تشمل قيمة المعلمة المجهولة باحتمال معلوم فيمكننا تقدير95% بفترة يصاحبها مقدار ثقة معلوم99%μ مثلا.

والثقة هي مقدار الاحتمال الّذي نثق به ويسمي بمعامل الثقة فقولنا ثقة مقدارها99%يعنى أن هناك فرصة قدرها 99من100بأن الفترة تضم قيمة المتوسط الحقيقي للمجتمعμ.

الأخطاء وأنواعها: يوجد نوعان من الأخطاء

الخطأ من النوع الأول α= Type I Error : ويعرف بأنه:(رفض فرض العدم(H_0)عندما يكون الفرض صحيح).

$$\alpha = P\ (\text{خطأ النوع الأول}) = p\ (\text{رفض } H_0 \text{ وهي صحيحة})$$

الخطأ من النوع الثاني β= Type II Error : ويعرف بأنه:(قبول فرض العدم (H_0) عندما يكون الفرض خاطئ.

$$\beta = P\ (\text{خطأ النوع الثاني}) = p\ (\text{قبول } H_0 \text{ وهي خاطئة})$$

جدول () يوضح أنواع الأخطاء :

القرار الاحصائي / الحالة الحقيقية	رفض (H_0)	قبول(H_0)
(H_0)صحيحة	α قرار خاطئ (الخطأ من النوع الاول)	α-1 قرار صحيح
(H_0)خاطئة	1-β قرار صحيح	β قرار خاطئ (الخطأ من النوع الثاني)

5.2 خطوات إجراء الاختبار: عند إجراء الاختبارات الإحصائية لابد من خطوات أساسية يجب اتباعها وهي:

1- تحديد فرضية العد م (H_0) والفرضية البديلة (H_1) مع مراعاة تحديد نوع الفرضية (H_1) لتكون من جانب واحد أو جانبين.

2- تحديد مستوي المعنوية (∝)، عادة ما تكون(0.05) أو(0.01).

3- تقدير المؤشر الإحصائي المطلوب اختباره.

4- حساب قيمة احصاءه الاختبار ولتكن(V).

5- تحديد القيمة الحرجة V_αأو $(V\alpha/_2)$، اعتمادا علي مستوي المعنوية (∝)، ونوع الفرضية (H_1) ودرجات الحرية (d f) في حالة توزيعات المعاينة.

6- اتخاذ القرار بشأن رفض او قبول فرض العدم (H_0)،بعد مقارنة قيمة احصاءة الاختبار المحسوبة (v) مع القيم الحرجة (V_α) أو$(V\alpha/_2)$ حيث نوع الفرضية البديلة (H_1)،ومستوي المعنوية (α)،فإذا كانت

- قيمة إحصاءه الاختبار المحسوبة (v) تقع في منطقة رفض فرض العدم (H_0)،وهذا يدل علي رفض فرض العدم (H_0)،وقبول الفرض البديل (H_1).
- إذا وقعت قيمة إحصاءه الاختبار المحسوبة (v) في منطقة قبول فرض العدم (H_0)،فهذا يدل علي قبول فرض العدم (H_0)،ورفض الفر ض البديل(H_1).

7- الاستنتاج: يقوم الباحث في هذه الفقرة بتثبيت استنتاجاته حول معلمات المجتمع التي تم اختبارها في ضوء معطيات العينة التي اختير ت من مجتمع الدراسة.

المقدر ((Point Estimator: هي دالة او الصيغة الرياضية التي تستخدم في عملية التقدير.

التقدير(Estimation): هي القيمة العددية التي نحصل عليها بعد التعويض في الدالة او الصيغة الرياضية بالبيانات الفعلية أو بمعني توضح كيفية استخدام بيانات العينة في تقدير المعلمة المجهولة.

6.2 اشتقاق توزيع t:

إذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ وكان $X \sim X^2_{(n)}$عليه

فإن المتغير العشوائي $T = z/\sqrt{\frac{x}{n}}$ له توزيع يطلق عليه توزيع t بدرجة حرية n.

وفق الدالة الاحتمالية التالية:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma\frac{n+1}{2}}{\Gamma\frac{n}{2}\sqrt{n\pi}} \quad \left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}} \end{cases} , -\infty < \quad t < \infty$$

ويرمز له بالرمز $t \sim t(n)$ حيث أن Z وX متغيران مستقلان

الإثبات:

نفرض أن u=×

$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{x}{n}}}$$

$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{u}{n}}}$$

$$z = t\sqrt{\frac{u}{n}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{u} \;\Longrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{du}} = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$|\mathrm{J}| \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{n}} & \frac{t}{2\sqrt{u}\sqrt{n}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{u}{n}}$$

$$f(z,x) = f(z)\cdot f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma_{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \; x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2}}\,(z^2 + \mathrm{x})$$

$$f(t,u) = f(z,x)\Bigg|_{\substack{x = u \\ z = t\sqrt{\frac{u}{n}}}} \cdot \;\; |\mathrm{J}|$$

$$f(t,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \cdot [u]^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2}}\left[(t\sqrt{\frac{\mathrm{u}}{n}})^2 + u\right]\sqrt{\frac{u}{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma_{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}}\; [u]^{\frac{n}{2}-1+\frac{1}{2}} \;\; e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2 u}{n} + u\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}}\; [u]^{\frac{n+1}{2}-1} \qquad e^{-\frac{1}{2}(t^2\frac{u}{n}+u)}$$

$$f(t,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}}\; [u]^{\frac{n+1}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2}u\left[1+\frac{t^2}{n}\right]}$$

$$\therefore\ f_T(\mathrm{t}) = \int_{\forall u} f(t,u)\, du \qquad \mathrm{u} > 0$$

$$f_T(\mathrm{t}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}} \quad [u]^{\frac{n+1}{2}-1} \quad e^{-\frac{1}{2}u(1+\frac{t^2}{n})} \qquad du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\Gamma_{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty [u]^{\frac{n+1}{2}-1}\, e^{\frac{-u}{2}(1+\frac{t^2}{n})} \quad \mathrm{du}$$

Let

$$y = \frac{u}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \Longrightarrow u = 2y\left[1 + \frac{t^2}{n}\right]^{-1}$$

$$du = 2\left[1 + \frac{t^2}{n}\right]^{-1} \quad dy$$

$$f_T(t) = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \left[\frac{2y}{1+\frac{t^2}{n}}\right]^{\frac{n+1}{2}-1} \quad e^{-y} \cdot \frac{2}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]} \quad dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \left[\frac{2y}{1+\frac{t^2}{n}}\right]^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-y} \cdot \frac{2}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]} \mathrm{dy}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \; \frac{2^{\frac{n+1}{2}-1}}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}-1}} \cdot \frac{2}{\left[1+\frac{t^2}{2}\right]} \int_0^\infty y^{\frac{n+1}{2}-1}\, e^{-y} \quad \mathrm{dy}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} \quad \Gamma_{\frac{n+1}{2}} \cdot 1^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}\Gamma_{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \Gamma_{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma_{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}\ \Gamma_{\frac{n+1}{2}}$$

$$\therefore f_T(\mathrm{t}) = \frac{\Gamma_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\Gamma_{\frac{n}{2}}} \left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{-\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

- **التوقع والتباين لتوزيع** t

$$E(t) = E\left[\frac{z}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\right] = E(z)\cdot E\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\right] = 0\ \cdot E\left(\sqrt{\frac{n}{x}}\right) = 0$$

$$\therefore E(t) = 0$$

$$E\ (t^2\ ) = E\left[\frac{z}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\right]^2 = E(Z^2)\ \cdot E\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{n}}}\right]^2$$

$$= \ E(\,Z^2)\cdot E(\frac{n}{x})$$

z~ N(0,1)

$$\nu\mathrm{ar}(z) = 1$$

$$\nu\mathrm{ar}(z) = \mathrm{E}(z^2) - (\mathrm{E(z)})^2$$

$$E(z^2) = \nu ar(z) + (E(z))^2$$

$$E(z^2) = 1 + 0 = 1$$

$$\therefore \mathrm{E}(z^2) = 1$$

$$\mathrm{E}\ (t^2) = 1 \cdot E\left(\frac{n}{x}\right) = nE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\ dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\ \frac{1}{\Gamma\frac{n}{2} 2^{\frac{n}{2}}}\ x^{\frac{n}{2}-1}\ \ e^{-\frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma\frac{n}{2}\ 2^{\frac{n}{2}}}\ \ \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-2}\ \ x^{-\frac{x}{2}}\ \ \mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\frac{n}{2} 2^{\frac{n}{2}}}\ \Gamma\frac{n}{2} - 1\ \ \ 2^{\frac{n}{2}-1}$$

$$= \frac{2^{-1}}{\frac{n}{2} - 1} = \frac{2^{-1}}{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2(\frac{n-2}{2})} = \frac{1}{n-2}$$

$$\mathrm{E}(t^2) = \mathrm{n} \cdot \left(\frac{1}{n-2}\right) = \frac{n}{n-2}$$

$$\mathrm{var}(t) = (Et^2) - (Et)^2 = \frac{n}{n-2} \qquad \mathrm{n} > 2$$

- **الدالة المولدة للعزوم:**

$$n_x(t) = Ee^{tx} = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot e^{tx} \left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\frac{-n+1}{2}} \mathrm{dx}$$

هذا التكامل معقد جدا لذلك للحصول على الدالة المولدة تستخدم طريقة العزوم وبما أن التوزيع متماثل يجعل العزوم من الرتبة الفردية (2r+1) مساوية لصفر والعزوم

$$\mathrm{E}x^{2r} = \mathrm{E}(\frac{z}{\sqrt{\frac{y}{n}}})^{2r}$$

$$Z \sim N(0,1), Y \sim X^2(n)$$

$$= n^r \mathrm{E}(z)^{2r} \mathrm{E}(y)^{-r} = n^r (z^2)^r \mathrm{E}(y)^{-r}$$

$$E(y)^r = \frac{\Gamma_{\frac{n}{2}+r} \; 2^r}{\Gamma_{\frac{n}{2}}}$$

$$Ey^{-r} = \frac{\Gamma_{\frac{n}{2}-r} \; 2^{-r}}{\Gamma_{\frac{n}{2}}}$$

$$z^2 \sim x^2(1) \quad , \propto = \frac{1}{2} \quad , \beta = 2$$

$$E(z^2)^r = \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}+r} \quad 2^r}{\Gamma_{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \mathrm{E}x^{2r} = \frac{n^r \Gamma_{\frac{1}{2}+r} \qquad \Gamma_{\frac{n}{2}-r}}{\Gamma_{\frac{1}{2}} \Gamma_{\frac{n}{2}}} \quad , \mathrm{r} = 1,2, \dots$$

$$\mathrm{n} \geq 2\mathrm{r}$$

- **المنوال**

$$f_T(t) = \frac{\Gamma_{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma_{\frac{n}{2}} \sqrt{n\pi}} \left[1 + \frac{t^2}{n}\right]^{-(\frac{n+1}{2})} \qquad -\infty < \mathrm{t} < \infty$$

نأخذ Ln لطرفين

$$\mathrm{Lnf}(t) = \mathrm{Ln}(c) - \frac{(n+1)}{2} \ln\left[1 + \frac{t^2}{n}\right]$$

$$\frac{\acute{f}_{T(t)}}{f_{T(t)}} = 0 - \frac{n+1}{2} \frac{1}{\left[1+\frac{t^2}{n}\right]} \cdot \frac{2t}{n}$$

$$= 0 - n + 1 \cdot \frac{n}{(t^2 n +)} \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow$$

$$\acute{f}\,(t) = -f(t)(n+1)\ \frac{t}{(n+t^2)}$$

$$\acute{f}(t) = 0\ \ , \mathrm{f(t)} > 0$$

$$\therefore (-n+1)\frac{t}{(n+t^2)} = 0$$

$$\acute{f}(t) = -f(t)(n+1)\frac{t}{(n+t^2)}$$

$$\bar{\bar{f}}(t) = -(\mathrm{n}+1)\left[f(t)\cdot\frac{(n+t^2)-t(2t)}{(n+t^2)^2} + \frac{t}{(n+t^2)}\grave{f}(t)\right]$$

$$= -(n+1)\left[f(t)\cdot\frac{(n+t^2)-t(2t)}{(n+t^2)^2} + \frac{-t}{(n+t^2)}\ f(t)(n+1)\frac{t}{(n+t^2)}\right.$$

$$= -(\mathrm{n}+1)\cdot\mathrm{f(t)}\left[\frac{n-t^2}{(n+t^2)^2} + \frac{n}{(n+t^2)}\right]$$

$$\bar{\bar{f}}(t) = -(\mathrm{n}+1)\cdot\mathrm{f(t)}\ \ \left[\frac{(n+t^2)-2t^2-t^2n-t^2}{(n+t^2)^2}\right]$$

$$= -(n+1)f(t)\left[\frac{n-2t^2-nt^2}{(n+t^2)^2}\right]$$

$$if\quad t=0\qquad then\quad \bar{\bar{f}}(t) = -(n+1)f(t)\ \left[\frac{n}{n^2}\right]$$

t>0 ,n>0, $\bar{\bar{f}}$(t)< 0

∴ Mode(t)=0

- **نقاط الانقلاب:**

$$\bar{\bar{f}}(\mathrm{t}) = -(\mathrm{n}+1)\cdot \mathrm{f}(\mathrm{t})\left[\frac{n-2t^2-nt^2}{(n+t^2)^2}\right]$$

$$\text{Let} \qquad \bar{\bar{f}}(t) = 0 \qquad \text{then} \qquad \mathrm{f(t)} > 0 \quad ,\mathrm{t} = \mp\infty$$

$$0 = -(\mathrm{n}+1)\left[\frac{n-2t^2-nt^2}{(n+t^2)^2}\right]$$

$$= \frac{n-2t^2-nt^2}{(n+t^2)^2} = 0$$

$$\mathrm{n} - 2t^2 - nt^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ -t^2(n+2) + \mathrm{n} = 0$$

$$\Rightarrow -t^2 = \frac{-n}{n+2}$$

$$\therefore \mathrm{t} \pm \sqrt{\frac{n}{n+2}}$$

- **معامل الالتواء:**

$$S_k = \frac{E(t) - M0de}{\sqrt{var(t)}} \qquad = \frac{0-0}{\left(\frac{n}{n-2}\right)} = 0$$

- **الدالة التوزيعية:**

$$\mathrm{f(t)} = \mathrm{p(T \le t)} = \int_{-\infty}^{t} f(w)\, dw$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma_{\frac{n}{2}}} \left[1+\frac{w^2}{2}\right]^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{dw}$$

$$p(T\ < 0) = \frac{1}{2}$$

$$p(T \le t) = \frac{1}{2} + \int_0^t \frac{\Gamma_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\Gamma_{\frac{n}{2}}} \left[1 + \frac{w^2}{2}\right]^{-(\frac{n+1}{2})} dw$$

- معامل التفرطح:

$$\beta = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

$$\mathrm{E}(x^{2r}) = n^r \frac{\Gamma_{\frac{n}{2}-r} \quad \Gamma_{r+\frac{1}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}} \quad \Gamma_{\frac{n}{2}}}$$

$$\mu_2 = \mathrm{E}(x^2) = \frac{n\Gamma_{\frac{n}{2}-1} \quad \Gamma_{\frac{3}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}}\Gamma_{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{n\left(\frac{n}{2}-2\right)! \qquad \frac{1}{2}\Gamma_{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}}(\frac{n}{2}-1)!}$$

$$= \frac{n(\frac{n}{2}-2)!\,\frac{1}{2}}{(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)!} = \frac{\frac{1}{2}n}{\frac{n}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}n}{\frac{n-2}{2}}$$

$$= \frac{n}{n-2}$$

$$\mu_4 = \mathrm{E}(x^4) = \frac{n^2\Gamma_{\frac{n}{2}-2} \quad \Gamma_{\frac{5}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}}\ \Gamma_{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{n^2\left(\frac{n}{2}-3\right)!\,\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\Gamma_{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-3\right)!} = \frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$$

$$\lambda = \frac{3n^2/(n-2)(n-4)}{n^2/(n-2)^2} - 3 = \frac{3(n-2)}{n-4} - 3 = \frac{3n-6-3n+12}{n-4}$$

$$= \frac{6}{n-4}$$

$$\lambda = \frac{(3)(n-4)}{n-4} - 3 > 0$$

7-2 خواص التوزيع t:

1- له متوسط مقداره صفر.
2- التوزيع متماثل حول المتوسط.
3- في الغالب له تباين أكبر من الواحد ولكن التباين يقترب من الواحد كلما كبر حجم العينة.
4- منحني التوزيع t يشبه منحني التوزيع الطبيعي المعياري فهو ناقوسي الشكل ومتماثل حول وسطه الحسابي ويساوي صفر.
5- يمتد طرفا منحنى التوزيع إلى مالا نهاية في الاتجاه السالب والموجب دون أن يلامسا المحور الافقي.

8-2 استخدامات توزيع t:

توزيع t له عدة استخدامات منها:-

1- يستخدم لاختبار متوسط مجتمع طبيعي تباينه مجهول.
2- لاختبار الفرق بين مجتمعين طبيعيين مجهولي التباين.
3- لاختبار معنوية معامل الارتباط.
4- لاختبار معنوية معاملات الانحدار في نموذج انحدار خطى متعدد المتغيرات
5- لاختبار معنوية معامل الارتباط الجزئي.
6- تكوين حدود الثقة لمتوسط مجتمع مجهول التباين.

9-2 علاقة التوزيع t ببعض التوزيعات الأخرى.

توجد علاقة بين التوزيع t والتوزيع F:

وتنص هذه العلاقة على ما يلي:

إذا كان t~ t(n) فإن $f = t^2 \sim F(1,n)$

البرهان:

$$t^2 = f \qquad t = \pm\sqrt{f} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$dt = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \qquad 0 < f < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = 1$$

$$2\int_{0}^{\infty} g(t)\, dt = 1$$

$$2\int_0^\infty \frac{\Gamma\frac{n+1}{2}}{\sqrt{n\pi}\Gamma\frac{n}{2}} \left[1+\frac{t^2}{n}\right]^{-\frac{(n+1)}{2}} \mathrm{dt} = 1$$

$$2 = \int_0^\infty \frac{\Gamma\frac{n+1}{2}}{\sqrt{n\pi}\Gamma\frac{n}{2}} \left[1+\frac{f}{n}\right]^{\frac{-(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Gamma\frac{n+1}{2}}{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{f^{-\frac{1}{2}}}{\left[1+\frac{f}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}\ df = 1$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Gamma\frac{n+1}{2}}{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\frac{n}{2}} \cdot \ (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} \frac{f^{-\frac{1}{2}}}{\left[1+\frac{f}{n}\right]^{\frac{1+n}{2}}}\ \mathrm{d} = 1$$

$$\therefore f = t^2 \sim \mathrm{f}(1,\mathrm{n})$$

10.2 فترات الثقة للمتوسطات.

- **فترات الثقة لمتوسط مجتمع واحد:**

عند إيجاد فترات الثقة يمكن تقسيمها علي النحو التالي

عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول:

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وكان تبا ينه σ^2 مجهول ،ولنجد فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ،نستخدم تباين العينة S^2 كمقدار لتباين المجهول σ^2،وإذا وضعنا قيمة S^2 بدلا من σ^2 في العلاقة التالية : $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$

نحصل علي متغير عشوائي اخر يطلق المتغير العشوائي T حيث : $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$

وتوزيعه الاحتمالي يسمي توزيع t بدرجة حرية $\nu = n - 1$ ، T هنا هي دالة في المقدر $\varkappa$، والمعلمة المجهولة μ،والتوزيع الاحتمالي للمتغير T لا يعتمد علي μ إذن T هنا هي كمية محورية نستطيع استعمالها في ايجاد فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع u عندما يكون التباين مجهول.

وعلمت ان التوزيع T توزيع متماثل حول وسطه الحسابي ويساوي صفر، وإذا كانت لدينا قيمتان للمتغير العشوائي T وكانت المساحة علي يمين إحدى هاتين القيمتين تساوي المساحة علي يسار القيمة الأخرى، وتكون القيمتان متساويتين في القيمة المطلقة ومختلفتين في الإشارة.

وبصفة عامة إذا رمزنا للمساحة بين قيمتين للمتغير العشوائي T بالرمز $(1-\propto)$ تكون المساحة علي يمين القيمة الكبرى تساوي المساحة التي علي يسار القيمة الصغرى وتساوي كل منهما $\alpha/2$. وتكون القيمتان متساويتين في القيمة المطلقة ومختلفتين في الاشارة وبما أن المساحة تحت المنحنى الاحتمالي هي عبارة عن احتمالات ،فيعني ذلك أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي T عند درجة حرية v قيمة محصورة بين القيمتين $-t_{\alpha/2}$ و $t_{\alpha/2}$ يساوي $(1-\alpha)$ ،ونعبر عنها كالتالي

$$P(-t\,\alpha/2(\nu) \leq T \leq t\propto/2(\nu) = 1-\alpha$$

ونستطيع التعبير عن T باستعمال الكمية المحورية التالية : $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$

$$p\left(-t_{\propto/2}(\nu) \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leq t_{\propto/2}(\nu)\right) = 1-\propto$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية علي الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة بين القوسين ،ونضرب كل طرف من أطراف المتباينة في $\sqrt{\frac{s^2}{n}}$ ثم طرح $\bar{x}$ ،والضرب في-1 وإعادة ترتيب المتباينة، نحصل علي الصورة التالية للاحتمال:

$$p\left(\bar{x} - t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 1{-}\propto$$

وبالتالي فإن فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ عندما يكون تباين المجتمع مجهول وعند مستوي ثقة $(1-\alpha) = \%100$

$$\left(\bar{x} - t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \text{ ، } \bar{x} + t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right)$$

مثال.:.إذاعلمت أن خلال فترة معينة كانت أوزان أكياس المكرونة المصنعة في مصنع مصراته تتوزع توزيعا طبيعيا ،فإذا سحبنا من هذا المجتمع عينة تشمل 25 كيس ،ووجدنا أن الوسط الحسابي لأوزان الأكياس المسحوبة 498.25 جرام بتباين 1.69، فقدر متوسط أوزان كل أكياس المكرونة المصنعة في مصنع مصراته خلال هذه الفترة وذلك باستخدام فترة ثقة 90 %.

الحل.: المجتمع في هذه الدراسة يتكون من أوزان كل الأكياس المصنعة في هذا المصنع خلال هذه الفترة والتي تتبع ا لتوزيع الطبيعي بتباين مجهول، وباستعمال فترة الثقة وهي :

$$\left(\bar{x} - t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \text{ ، } \bar{x} + t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right)$$

حيث أن:

$$.\ (1-\alpha)100\% = 90\%\alpha \text{ ، } s^2 = 1.69\text{،}\bar{x} = 498.25\text{،}n{=}25$$

$$\alpha = 0.10\text{،}1-\alpha = 0.90\text{، } \alpha/2 = 0.05$$

$$\nu = n-1 = 25-1 = 24\text{، } t_{\propto/2}(\nu) = t_{0.05(24)=1.711}$$

ونعوض في الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة نحصل على الحد الأدنى لفترة الثقة :

$$\bar{x} - t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}} = 498.25 - (1.711)\sqrt{\frac{1.69}{25}} = 498.25 - 0.44$$
$$= 497.81$$

والحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\bar{x} + t_{\propto/2}(\nu)\sqrt{\frac{s^2}{n}} =$$

$$498.25 + (1.711)\sqrt{\frac{1.69}{25}} = 498.25 + 0.44 = 498.69$$

إذن فترة الثقة لمتوسط أوزان كل الأكياس عند مستوي ثقة 90 %هي (69,498,81,497

أي نستطيع القول بثقة قدرها90%بأن الوسط الحسابي الحقيقي لأوزان الأكياس المصنعة في مصنع مصراته يقع بين القيمتين 497.81جرام و69.498 جرام.

- **فترات الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين:**

عندما تكون التباينات σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين ومتساويين

إذا كان المجتمع الأول يتوزع توزيعا طبيعيا μ_1متوسط ،وتباين σ_1^2،وهما مجهولين ،والمجتمع الثاني يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_2،وتباين σ^2 وهما مجهولين ،وسحبنا من المجتمع الاول عينة عشوائية حجمها n_1،ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها n_2 ،وكانت العينتان مستقلتين ، في هذه الحالة نجد أن تباين المجتمع الأول ،والثاني مجهولان ومتساويان ،وكل واحد يساوي σ^2،واستخدمنا نفس الرمز لتعبير عن σ_1^2 وσ_2^2 وهنا يعني انهما متساويان .

ونعلم مما سبق أن أفضل مقدر لتباين المجتمع هو تباين العينة المسحوبة منه، وأن أفضل مقدر لتباين المجتمع الأول هو تباين العينة المسحوبة منهs_1^2،وأن أفضل مقدر لتباين المجتمع الثاني هو تباين العينة المسحوبة منه s_2^2،وبالطبع s_1^2 و s_2^2 مختلفان في القيمة، وبما أن تباين المجتمع الأول يساوي تباين المجتمع الثاني، فليس من المنطق أن نقدر معلمتين متساويتين بتقديرين مختلفين، لذلك نقدر التباين بنفس المقدر ،وهو عبارة عن الوسط المرجح لتباين العينة الأولي وتباين العينة الثانية ،ويتم الترجيح بدرجة الحرية الخاصة بكل عينة ،ويطلق علي هذا المقدر بالتباين المشترك ويرمز له بالرمز s_p^2 ويحسب كالتالي :

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

أي أن:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

وبوضع قيمة s_p^2 بدلا من σ_1^2 و σ_2^2 في الصيغة لتالية :

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

نحصل على متغير عشوائي أخر يطلق عليه المتغير العشوائي T حيث

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} :$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية $V = n_1 + n_2 - 2$

إذن: $p\left(-t_{\propto/2}(v) \leq T \leq t_{\propto/2}(v)\right) = 1 - \propto$

ولتعبير عنT نستعمل الصيغة التالية:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

وبالتالي كتابة الاحتمال كما يلي:

$$p\left(-t_{\propto/2}(v) \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \leq t_{\propto/2}(v)\right)$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية علي الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة بين القوسين، بحيث نجعل الحد الاوسط للمتباينة يحتوي فقط علي المعلمة المجهولة، وهي الفرق بين متوسطي المجتمعين، نحصل علي الصورة التالية للاحتمال:

وبالتالي$p\begin{pmatrix} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\propto/2}(v)\sqrt{s_p^2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq \\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\propto/2}(v)\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \end{pmatrix} = 1 - \propto$

فإن: فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عندما تتوزع المجتمعان توزيعا طبيعيا بتباينين مجهولين ومتساويين وعند مستوي الثقة $100\%(1 - \alpha)$ هي:

$$\left(\begin{array}{c}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\propto/2}(v)\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}\right)},\\ (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\propto/2}(v)\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}\end{array}\right)$$

حيث: $v = n_1 + n_2 - 2$ ولا تستخدم فترة الثقة الا إذا توافرت الفروض التالية:

1- أن يتوزع المجتمع الأول توزيعاً طبيعياً.
2- أن يتوزع المجتمع الثاني توزيعاً طبيعياً.
3- العينتان مستقلتان.
4- التباينان σ_1^2و σ_2^2 مجهولان ومتساويان

وإذا كانت$n_2 \geq 30, n_1 \geq 30$ ،نستطيع استخدام هذه الفترة حتي إذا لم يتوفر الشرط الاول والثاني ،وذلك وفقاً لنظرية النهاية المركزية.

مثال: استخدمت طريقتان لإنتاج سلعة معينة ،وتوضح البيانات التالية الوقت بالدقائق المستغرق في إنتاج الوحدة بالنسبة لست وحدات أنتجت بالطريقة الأولي ،وخمس وحدات أنتجت بالطريقة الثانية ،حيث x_1 يمثل الوقت المستغرق عند استعمال الطريقة الأولي ،وx_2يمثل الوقت المستغرق عند استعمال الطريقة الثانية.

x_1	40	40	50	60	60	50
x_2	40	45	55	58	62	

فإذا علمت أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباينين متساويين ،فاحسب فترة ثقة95%للفرق بين متوسطي الوقت المستغرق بالطريقتين $(\mu_1 - \mu_2)$.

الحل: بما أن الوقت المستغرق في الانتاج بالطريقتين يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباينين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتان لآن كل عينة خاصة بآلة مستقلة عن الآلة الأخرى، إذن فترة الثقة المناسبة في هده الحالة هي:

$$((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\propto/2}(v)\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},$$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\propto/2}(\mathrm{v})\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})})$$

ولحساب هذه الفترة يجب إيجاد : $\bar{x}_1$، $\bar{x}_2$، s_1^2 ،s_2^2 ونحسب s_p^2 كالتالي:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}}{n_1} = \frac{300}{6} = 50 \quad ، \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_2} = \frac{260}{5} = 52$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{400}{5} = 80 \qquad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{338}{4} = 84.5$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(6-1)(80) + (5-1)(84.5)}{6 + 5 - 2} = 82$$

وبما أن:

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025 ، \alpha = 0.05 ، 1 - \alpha = 0.9$$

$$t_{\alpha/2(v)} = t_{0.025}(9) = 2.262$$

وبالتعويض في فترة الثقة للحد الأدنى والحد الأعلى نحص على الحد الأدنى وهو:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2(v)}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = (50-52) - (2.262)\sqrt{82}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) = -14.35$$

والحد الأعلى هو:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2(v)}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = (-2) + (2.262)\sqrt{(82)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = 10.35$$

إذن فترة الثقة للفرق بين متوسطي الوقت المستغرق بالطريقتين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوي ثقة 95%هي : $(-14.35, 10.35)$ أي نستطيع القول بثقة قدرها 95% بأن الفرق الحقيقي بين متوسط الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة بالطريقة الأولى ،ومتوسط الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة بالطريقة الثانية ،يقع بين القيمتين 14.35- دقيقة و 10.35 دقيقة.

عندما يكون التباينان σ_1^2 وσ_2^2 مجهولين وغير متساويين:

إن المجتمع الأول يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي μ_1،وتباين σ_1^2 ،والمجتمع الثاني يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي μ_2،وتباين σ_2^2،وكان σ_1^2،σ_2^2 مجهولين وغير متساويين ،وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها n_1،ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها n_2،وكانت العينتان مستقلتين ،وعلمنا مما سبق ،أفضل مقدر لتباين المجتمع هو تباين العينة المسحوبة منه ،أي أن أفضل مقدر لتباين المجتمع الأول σ_1^2 هو تباين العينة المسحوبة منه s_1^2،وأفضل مقدر لتباين المجتمع الثاني σ_2^2هو تباين العينة المسحوبة منه s_2^2، وبوضع s_1^2 بدلا من σ_1^2 و s_2^2 بدلامن σ_2^2 في العلاقة التالية:

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

نحصل علي المتغير التالي: $\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي معقد جداً، واقترحت عدة حلول لهذه المشكلة ،أكثرها استخداماً هو اعتبار أن توزيع هذا المتغير هو توزيع قريب من توزيع t بدرجات حرية

$$\mathrm{v}=\frac{(a_1+a_2)^2}{\left[(\frac{a_1^2}{n_1-1}))+(a_2^2/(n_2-1)\ )\right]}$$

حيث:

$$a_1=\frac{s_1^2}{n_1},\quad a_2=\frac{s_2^2}{n_2}$$

في هذه الحالة سوف نحصل علي فترة ثقة تقريبية.

وبإجراء نفس الخطوات التي أجريناها في الفترات السابقة، سنحصل علي فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين عندما يكون التباينان مجهولين وغير متساويين والتي تكون عند مستوي ثقة100 % (1-α) كما يلي:

فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ عندما يتوزع المجتمعان توزيعا طبيعيا بتباينين مجهولين وغير متساويين وعند مستوي ثقة$100\%\ (1-\alpha)$ هي:

$$[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\propto/2}(v)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}},$$

$$(\ \bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\propto/2}(v)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\quad]$$

حيث:

$$\mathrm{v}=(a_1+a_2)^2/\left[\left(\frac{a_1^2}{n_1-1}\right)+(\frac{a_2^2}{n_2-1}))\right]$$

$$a_2 = \frac{s_2^2}{n_2} \qquad\qquad a_1 = \frac{s_1^2}{n_1},$$

ولا تستخدم فترة الثقة إلا إذا توافرت الفروض التالية:

1- أن يتوزع المجتمع الأول توزيع طبيعيا.
2- أن يتوزع المجتمع الثاني توزيع طبيعيا.
3- العينتان مستقلتان.
4- التباينان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان وغير متساويين.

وعندما يكون حجم العينتين كبير بدرجة كافية أي$n_2 \geq 30, n_1 \geq 30$ ، نستطيع اعتبار أن توزيع المتغير

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

هو توزيع قريب من التوزيع الطبيعي المعياري، حتى إذا كان المجتمعان لا يتوزعان توزيعا طبيعيا، وذلك وفقا لنظرية النهاية المركزية.

وتكون في هذه الحالة فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين عندما يكون التباينان مجهولين وغير متساويين ،وعند مستوي ثقة $100\%(1-\alpha)$ كما يلي:

$$[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\propto/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}},$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\propto/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}]$$

مثال:. أجري امتحان في مادة الإحصاء لمجموعتين مستقلتين من الطلبة ، الأولي تشمل 75 طالبا، والثانية تشمل 50 طالبة وكانت نتائج هذا الامتحان للمجموعتين كما يلي:

مجموعة الطلبة	مجموعة الطالبات
$\bar{x}_1 = 72$	$\bar{\bar{x}}_2 = 66$
$s_1^2 = 64$	$s_2^2 = 36$

بافتراض أن تباين درجات الطلبة لا يساوي تباين درجات الطالبات $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

أوجد فترة الثقة للفرق بين متوسطي درجات الطلبة ودرجة الطالبات $(\mu_1 - \mu_2)$ باستخدام مستوي ثقة 96%

الحل:. بما أن $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^2$ ،والعينتين مستقلتان ،وحجمي العينتين كبيران ،أي أن $(n_1 \geq 30)$, $n_2 \geq 3$ فنستطيع استخدام فترة الثقة التالية:

$$[\,(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\propto/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\propto/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}]$$

وبما أن: $1 - \alpha = 0.96$، $\alpha = 0.04$، $\alpha/2 = 0.02$

$z_{0.02=2.055}$ ، .

ونعوض في فترة الثقة نحصل علي الحد الأدنى والحد الأعلى:

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\propto/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

والحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\propto/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

إذن فترة الثقة للفرق بين متوسط درجات كل الطلبة ،ومتوسط درجات كل الطالبات $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوي 96% هي: $(3.42،8.58)$

أي نستطيع القول بثقة قدرها 96% بأن الفرق الحقيقي بين متوسطي درجات الطلبة ودرجات الطالبات يقع بين القيمتين 3.42و8.58.

وبما أن حدي فترة الثقة موجبان، إذن نستنتج أن الوسط الحسابي لدرجات كل الطلبة أكبر من الوسط الحسابي لدرجات كل الطالبات.

- **فترات الثقة لمتوسط مجتمعين مرتبطين:**

في كثير من الدراسات عند مقارنة متوسطي مجتمعين، نجد أن العينتين غير مستقلتين، وتكون كل قيمة في العينة الاولي مرتبطة بقيمة في العينة الثانية، أي تكون القيمة الأولي في العينة

الأولي والقيمة الأولي في العينة الثانية تابعتين لنفس المفردة أي نجد أن قيم المشاهدة في العينتين تكون في شكل أزواج من القيم وهذا سبب تسمية العينتان بالعينتين المرتبطتين، ويجب أن تكون متساوية في الحجم.

ومن الحالات التي تستخدم فيها العينتين المرتبطتين ما يلي:

1- دراسة خاصة بالفرق بين طول اليد اليمني وطول اليد اليسرى للأشخاص ،ففي هذه الحالة نختار عينة تشملn من الأشخاص ،ولكل شخص نقيس طول يده اليمني وطول اليسرى ،وتكون لدينا عينتان ، الأولي تشمل اطوال اليد اليمني ،والعينة الثانية تشمل أطوال اليد اليسرى، ونجد أن القيمة الأولي في العينة الأولي تمثل طول اليد اليمني للشخص الأول ،والقيمة الأولي في العينة الثانية تمثل طول اليد اليسرى لنفس الشخص ،أي أن القيمة الأولي في العينة الأولي والقيمة الأولي في العينة الثانية تابعتان لنفس الشخص، أي قيمتين مرتبطتين تمثل زوجاً من القيم وهكذا بالنسبة لبقية الأشخاص وبالتالي يكون لدينا nزوج من القيم وتكون العينتين مرتبطتين .
2- دراسة خاصة بتأثير الإعلان علي الكميات المباعة من سلعة معينة ،فنختار عشوائياً عينة تشمل nمن المحلات التي تبيع هذه السلعة ،ونجمع بيانات عن الكمية المباعة في هذه المحلات خلال فترة معينة ،ثم نقوم بحملة إعلانية عن هذه السلعة ،وبعد هذه الحملة الإعلانية نقوم بتجميع البيانات عن الكمية المباعة في نفس المحلات السابقة لنفس المدة ،وبالتالي سيكون لدينا أمام كل محل قيمتان ،الأولي خاصة بالكمية المباعة قبل الإعلان ،والثانية خاصة بالكمية المباعة بعد الإعلان ،أي سيكون لدينا nزوج من القيم، وتكون العينتين مرتبطتين.
3- دراسة خاصة بتأثير اتباع نظام غذائي معين علي وزن الشخص، فنختار عشوائياً عينة تشمل nمن الأشخاص الذين سيتبعون هذا النظام الغذائي، ونجمع بيانات عن أوزانهن قبل البدء في النظام الغذائي، ثم بعد اتباعهم لهذا النظام مدة معينة، نقوم بتجميع بيانات عن أوزانهم، وبالتالي سيكون لدينا أمام كل شخص قيمتان، الأولي خاصة بالوزن قبل اتباع النظام الغذائي، والثانية خاصة بالوزن بعد اتباع النظام الغذائي أي سيكون لدينا nزوج من القيم، وتكون العينتين مرتبطتين.

وفي أغلب الحالات التي تكون فيها العينتين مرتبطتين، يكون الهدف هو المقارنة بين وسطين حسابيين لمجتمعين قبل وبعد إجراء معين.

وإذا رمزنا لقيم المجتمع الأول بالرمز x_1 ،ولقيم المجتمع الثاني بالرمز x_2،وكان حجم كل عينة يساوي n، فتكون بيانات العينتين مرتبطتين كالتالي:

وفي هذه الحالة يكون لدينا زوج من القيم خاص بكل مفردة ،فالزوج (x_{11}, x_{21}) خاص بالمفردة الأولي ، والزوج (x_{12}, x_{22}) خاص بالمفردة الثانية وهكذا...إلي الزوج (x_{1n}, x_{2n})أي تتكون ا لبيانات من n زوج من المشاهدات. والغرض من الدراسة هو تقدير الفرق بين الوسط الحسابي للمجتمع الأول الذي يمثل الظاهرة الأولي x_1، والوسط الحسابي للمجتمع الثاني الذي يمثل الظاهرة الثانية x_2، أي تقدير $(\mu_1 - \mu_2)$ ،أي نحسب

الفرق بين قيم الظاهرتين التابعتين لكل مفردة ،فنحصل علي عينة من الفروق ،و بذلك نكون قد اختزلنا هذه المشكلة من مشكلة عينتين إلي مشكلة عينة واحدة وهي عينة الفروق ،فإذا رمزنا للفرق بين قيمتي الظاهرتين بالرمز ،فتكون قيم عينة الفروق كما يلي:

عينة الفروق

$$d_1 = x_{11} - x_{21}$$

$$d_2 = x_{12} - x_{22}$$

$$\dots$$

$$d_n = x_{1n} - x_{2n}$$

وبافتراض أن المجتمع الأول يتبع توزيعاً طبيعيا والمجتمع الثاني يتبع توزيعاً طبيعياً ،فيمكن إثبات أن توزيع الفروق سيتبع التوزيع الطبيعي ،أي أن مجتمع الفروق سيتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط قدره μ_d ،وتباين قدرهσ_d^2، حيث:

$$\mu_d = \mathrm{E(d)} = \mathrm{E}(x_1 - x_2) = \mathrm{E}(x_1) - \mathrm{E}(x_2)$$
$$= \mu_1 - \mu_2$$

وأفضل مقدر للوسط الحسابي لمجتمع الفروق $(\mu_d = \mu_1 - 2$ هو الوسط الحسابي لعينة الفروق $\bar{d}$.وبما أن تباين مجتمع الفروق مجهول ،إذن سنقدره بتباين عينة الفروق s_d^2 ،ونجد أن المتغير العشوائي التالي :

$$\frac{\bar{d} - \mu_d}{\sqrt{s_d^2/n}}$$

يتوزع توزيع tبدرجات حرية $v = (n-1)$ ،وبإجراء نفس الخطوات التي أجريناها في فترات الثقة السابقة، نجد أن:

فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين في حالة عينتين مرتبطتين$\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ عند مستوي ثقة $100\%(1-\alpha)$ هي :

$$(\bar{d} - t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\frac{s_d^2}{n}} \text{ ، } \bar{d} + t_{\alpha/2}\,(v)\sqrt{\frac{s_d^2}{n}})$$

حيث: $v = n - 1$ وتحسب $\bar{d}$ وs_d^2 كما يلي:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} di}{n} \quad \text{،}$$

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(di - \bar{d})^2}{n-1}$$

مثال .: توضح البيانات التالية عدد الأخطاء المطبعية لخمس طبعات قبل وبعد الاشتراك في برنامج تدريب خاص بالطباعة:

الطباعة	1	2	3	4	5
قبل التدريب	8	7	4	10	4
بعد التدريب	7	5	6	7	3

أوجد 95% فترة ثقة للفرق بين الوسط الحسابي للأخطاء قبل وبعد الاشتراك في برنامج التدريب وذلك بافتراض أن المجتمعين يتوزعان توزيعاً طبيعياً.

الحل.: نوجد عينة الفروق ثم نحسب وسطها الحسابي وتباينها وذلك كما يلي:

الطباعة	x_1	x_2	$d = x_1 - x_2$	$d - \bar{d}$	$(d - \bar{d})^2$
1	8	7	1	0	0
2	7	5	2	1	1
3	4	6	-2	-3	9
4	10	7	3	2	4
5	4	3	1	0	0

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(di - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{14}{4} = 3.50، \ \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} di}{n} = \frac{5}{5} = 1$$

بما أن العينتين مرتبطتين، والمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعياً، إذن 95% فترة ثقة للفرق بين الوسط الحسابي للأخطاء قبل وبعد الاشتراك في برنامج التدريب تحسب كما يلي:

$$(\bar{d} - t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\frac{s_d^2}{n}} \ ، \ \bar{d} + t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\frac{s_d^2}{n}})$$

وبما أن

$$,\text{v} = \text{n} - 1 = 5 - 1 = 4، \alpha/2 = 0.025، \alpha = 0.05، 1 - \alpha = 0.95،$$

إذن : $t_{\alpha/2}\,(v) = t_{0.05}(24) = 2.776$

وبالتعويض في الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة نحصل على:

الحد الأدنى:$\bar{d} - t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\frac{s_d^2}{n}} = 1 - (2.776)\sqrt{\frac{3.50}{5}} = 1.0 - 2.32 = -1.32$

والحد الأعلى:$\bar{d} + t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\frac{s_d^2}{n}} = 1 + (2.776)\sqrt{\frac{3.50}{5}} = 1.0 + 2.32 = 3.32$

إذن 95% فترة ثقة للوسط الحسابي للفروق ،أي الفرق بين الوسط الحسابي للأخطاء قبل وبعد الاشتراك في برنامج التدريب هي:$(-1.32,3.32)$

أي نستطيع القول بثقة 95% بأن الفرق بين الوسط الحسابي للأخطاء قبل وبعد الاشتراك في برنامج التدريب يقع بين 1.32- و3.32.

11-2 اختبارات الفروض للمتوسطات.

- **اختبارات الفروض لمتوسط مجتمع واحد.**

عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول:

إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهولاً فنقدره بأفضل مقدر له وهو تباين s^2 حيث:

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

وتكون إحصائية الاختبار المناسبة هي المتغير العشوائي T ،حيث

$$T = \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

ويتبع توزيع t بدرجة حري$(v = n - 1)$.

مثال: في دراسة إحصائية سابقة، وجد أن الوسط الحسابي للإنتاج السنوي للمنتج في مصنع للسجاد 14 سجادة، فإذا اتبع في هذا المصنع أسلوب جديد للإنتاج، واخترنا عينة عشوائية تحتوي علي 9 منتجين وكان إنتاجهم السنوي كما يلي :

18، 23، 17، 19 ، 15، 11، 14، 16، 11

بافتراض أن إنتاج المنتج سنويا يتبع توزيعا طبيعياً، اختبر ما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلي زيادة الوسط الحسابي للإنتاج السنوي لكل المنتجين ،و ذلك باستخدام مستوي معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل: الفروض الإحصائية للاختبار هي:

$$H_0: \mu = 14 \quad H_1: \mu > 14$$

بما أن المجتمع يتوزع توزيع طبيعي وتباين المجتمع مجهول، فإن إحصائية الاختبار المناسبة في هذه الحالة هي:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيعt بدرجات حرية $(v = n - 1 = 8)$ والاختبار ذو طرف أيمن ومستوي المعنوية $\alpha = 0.05$ ونحصل علي القيمة الحرجة من الجدول $t_\alpha(v) =$ $t_{0.05} = 1.86$ ،ونحسب قيمة المشاهدة الاحصائية للاختبار ،نحسب أولا الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ وتباين العينةs^2:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{11 + 16 + 14 + \cdots + 18}{9} = 16$$

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n_1}$$

$$= \frac{(11 - 16)^2 + (16 - 16)^2 + \cdots + (18 - 16)^2}{9 - 1} = \frac{118}{8} = 14.75$$

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/_n}} = \frac{16 - 14}{\sqrt{14.75/_9}} = \frac{2}{1.28} = 1.56$$

وقيمة المشاهدة الإحصائية تقع في منطقة القبول لأن$(1.86 > 1.56)$ ،فإن الاختبار ليس ذا معنوية ،إذن نقبل H_0 ،وهذه الطريقة لا تؤدي الي زيادة الوسط الحسابي للإنتاج السنوي للمنتج ،والفرق بين قيمة الوسط الحسابي المذكور في H_0 والوسط الحسابي للعينة ليس فرق حقيقي وانما سببه خطأ الصدفة.

- **اختبارات الفروض للفرق بين متوسط مجتمعين مستقلين.**

إذا كان لدينا مجتمعان ،الأول يتوزع توزيع طبيعي بوسط حسابي μ_1 ،وتباين σ_1^2 ،والثاني يتوزع توزيع طبيعي بوسط حسابي μ_2 وتباين σ_2^2 ،وأردنا وضع فروض إحصائية حول الفرق بين متوسطي هذين المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ ، فتكون الفروض الاحصائية كالتالي :

يفترض فرض العدم H_0أن الوسط الحسابي للمجتمع الأول يساوي الوسط الحسابي للمجتمع الثاني ،أي أن الفرق بين الوسطين الحسابيين يساوي صفر، وفي هذه الحالة الفرض البديل H_1 سيفرض أن الوسطين الحسابيين غير متساويين ،أي أن الفرق بينهما لا يساوي صفر ،ونكتب الفروض كالتالي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

وهذا الاختبار اختبار من طرفين.

يفترض فرض العدم H_0 أن الوسط الحسابي للمجتمع الأول يساوي أو أقل من الوسط الحسابي للمجتمع الثاني ، أي أن الفرق بين الوسطين الحسابيين

$(\mu_1 - \mu_2)$يساوي صفر أو مقدار سالب ،وفي هذه الحالة الفرض البديل H_1 للوسط الحسابي للمجتمع الأول أكبر من الوسط الحسابي للمجتمع الثاني ،أي أن الفرق $(\mu_1 - \mu_2)$أكبر من الصفر ،وتكتب الفروض كما يلي :

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

ويكون الاختبار من الطرف الايمن.

يفترض فرض العدم H_0 أن الوسط الحسابي للمجتمع لأول يساوي أو أكبر من الوسط الحسابي للمجتمع الثاني، أي الفرق بين الوسطين الحسابيين$(\mu_1 - \mu_2)$ يساوي الصفر أو أكبر من الصفر ، وفي هذه الحالة الفرض البديل H_1 للوسط الحسابي للمجتمع الأول أقل من الثاني ،أي الفرق بين $(\mu_1 - \mu_2)$ أقل من الصفر(سالب)، وتكتب الفروض كما يلي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 =< 0$$

ويكون الاختبار من طرف أيسر

وفي هذه الاختبارات المعلمة المجهولة المراد اختبارها هي الفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ ، وبما أن أفضل مقدر لهذه ا لمعلمة هي الإحصائية$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ ،و بالتالي الصورة المعيارية لهذه تكون هي إحصائية الاختبار ،وهي نفس الإحصائية التي استخدمنا ها في الحصول علي فترة الثقة للفرق بين وسطين حسابين لمجتمعين، وسنتعرض لنفس الحالات التي تعرضنا لها سابقا وهي:

عندما يكون التباينان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و متساويين:

إذا توافرت الفروض التالية:

1- المجتمع الأول يتوزع توزيعاً طبيعياً.
2- المجتمع الثاني يتوزع توزيعاً طبيعيِا.

3-العينتان مستقلتان.

4-التباينان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان وغير متساويان.

فإننا نقدر كلا من التباينين σ_1^2 و σ_2^2 ،بالتباين المشترك S_P^2،حيث يحسب S_P^2 كما يلي .

$$S^2_{P}=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)}$$

وعند استخدام s_p^2 بدلاً من σ_1^2 و σ_2^2، تكون إحصائية الاختبار هي المتغير العشوائي T

حيث: $T=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$

وتوزيعها الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية $v=n_1+n_2-2$

وعندما يكون التباينان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وغير متساويين:

إذا توافرت الفروض التالية:

1- المجتمع الأول يتوزع توزيعاً طبيعياً.
2- المجتمع الثاني يتوزع توزيعاً طبيعياً.
3- العينتان مستقلتان.
4- التباينان مجهولان وغير متساويين.

وفي هذه الحالة نقدر تباين كل مجتمع بتباين العينة المسحوبة منه ،أي نقدر تباين المجتمع الأول σ_1^2 بتباين العينة المسحوبة منه s_1^2 ،ونقدر تباين المجتمع الثاني σ_2^2 بتباين العينة المسحوبة منهs_2^2 ،وباستخدام s_1^2 بدلا من σ_1^2 و s_2^2 بدلاً من σ_2^2 ،فإن إحصائية الاختبار ستأخذ الصورة التالية والتي سنرمز لها بالمتغير T^*،حيث:

والتوزيع الاحتمالي لهذه الإحصائية كما ذكرنا سابقاً هو توزيع قريب من توزيعt بدرجات حرية كما يلي:

$$v=\frac{(a_1+a_2)^2}{\left[(a_1^2/(n_1-1)+\left(\frac{a_2^2}{n_2-1}\right)\right]}$$

حيث:

$$a_1=\frac{s_1^2}{n_1}\ ,a_2=\frac{s_2^2}{n_2}$$

وعندما يكون حجمين العينتين كبيرين بدرجات كافية أي $n_1 \geq 30$` و$n_2 \geq 30$ نستطيع اعتبار أن توزيع الإحصائية T^* هو توزيع قريب من التوزيع الطبيعي المعياري ،حتي إذا كان المجتمعان لا يتوزعان توزيعاً طبيعياً، وذلك وفقاً لنظرية النهاية المركزية .

وباستخدام الجدول المناسب للحالة التي نتعامل معها في (في جدول z أو t)،نستطيع جدول الحصول علي القيمة أو القيمتين الحرجتين ،ثم نحسب قيمة المشاهدة الإحصائية للاختبار باستخدام بيانات العينتين ،فإذا وقعت قيمة المشاهدة في منطقة الرفض، نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1 ،أما إذا وقعت في منطقة القبول فنقبل فرض العدم H_0 .

- **اختبارات الفروض لعينتين مرتبطتين**

عندما تكون قيم المشاهدة في العينتين في شكل أزواج من القيم ،تسمي العينتين بالعينتين المرتبطتين ،فإذا رمزنا لقيم المجتمع الأول بالرمز x_1 ،ولقيم المجتمع الثاني بالرمز x_2 ،وكان حجم كل عينة يساوي n ،فتكون بيانات العينتين المرتبطتين كما يلي:

رقم المفردة (i)	1	2	…	N
العينة الأولي	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
العينة الثانية	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}

أي يكون لدينا n زوج من المشاهدات .ففي هذه الحالة ،نحسب الفرق بين قيم الظاهرتين التابعتين فنحصل علي عينة من الفروق ،ونكون قد اختزلنا مشكلة من مشكلة عينتين إلي مشكلة عينة واحدة وهي عينة الفروق ،فإذا رمزنا للفرق بين قيمتي الظاهرتين بالرمز d ،فتكون قيم عينة الفروق كما يلي:

عينة الفروق

$$d_1 = x_{11} - x_{21}$$

$$d_2 = x_{12} - x_{22}$$

$$\cdots$$

$$d_n = x_{1n} - x_{2n}$$

وأن أفضل مقدر للوسط الحسابي لمجتمع الفروق ($\mu_d = \mu_1 - \mu_2$) هو الوسط الحسابي لعينة الفروق $\bar{d}$،وبما أن تباين مجتمع الفروق مجهول ، ولذلك نقدره بتباين عينة الفروق s_d^2، وسنجد أن إحصائية الاختبار لاختبار أي فرض إحصائي خاص بالفرق بين وسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ باستعمال عينتين مزدوجتين ،هي المتغير العشوائيT ،حيث

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sqrt{s_d^2/n}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيعt بدرجات حرية $(n - 1) = v$

مثال:. يوجد لدينا مجتمعان يتوزعان توزيعاً طبيعياً، الأول تباينه40،والثاني تباينه 60،فإذا سحبنا عينتين مستقلتين ،الأولي من المجتمع الأول وكان وسطها الحسابي 35،والثانية من المجتمع الثاني وكان وسطها الحسابي 33،فإذا كانت كل عينة تحتوي علي25مفردة ،فاختبر ما إذا كان هناك فرق بين متوسطي المجتمعين ،وذلك باستخدام مستوي معنوية $\alpha = 0.10$

الحل:.

بما أننا نريد أن نختبر ما إذا كان هناك اختلاف بين الوسطين الحسابيين أم لا، بغض النظر عن أي من الوسطين الحسابين للمجتمعين أكبر، إذن الفروض الإحصائية تكون كالتالي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

والاختبار يكون من طرفين.

وبما أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعياً، وتبايني المجتمعين معلومان، والعينتين مستقلتان، إذن إحصائية الاختبار المناسبة هي:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وتوزيع هنا توزيع طبيعي معياري.وبما أن $\propto = 0.10$ فمن الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما= $z_{\alpha/2} = z_{0.05}$ و $z_{1-(\alpha/2)} = z_{0.95} = -1.645$: 1.645

أي نرفضH_0 ،إذا كانت القيمة المشاهدة أكبر من 1.645 أو أقل من – 1.645 .

نحسب القيمة الاحصائية للاختبار كما يلي:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(35 - 33) - (0)}{\sqrt{\frac{40}{25} + \frac{60}{25}}} = \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

وبما أن القيمة تقع في منطقة القبول ،إذن نقبل فرض العدم H_0،و الاختبار ليس ذا معنوية، أي لا يوجد فرق حقيقي بين متوسطي المجتمعين واختلاف الوسطين الحسابيين للعينتين المسحوبتين ،سببه خطأ الصدفة .

الفصل الثالث

التطبيق العملي

باستخدام برنامج R

1-3 تمهيد

يهدف هذا الفصل لبيان طريقة تطبيق بعض استخدامات توزيع t باستخدام R .

وتشمل:.

1- اختبار t لعينة واحدة (one samples t. test).
2- اختبار t لعينتين مستقلتين (independent samples t. test).
3- اختبار t لعينتين مرتبطتين (paired-sample t. test).

2-3 اختبار تبعية البيانات للتوزيع الطبيعي.

- اختبار Kolmogorov- Smirnov

ويستخدم لاختبار الفرضية $H_0: \mathrm{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (البيانات لها توزيع طبيعي)

$H_1: x \sim N(\mu, \sigma^2\ \ )$ (البيانات ليس لها توزيع طبيعي)

ويمكن تطبيقه باستخدام R بالشكل التالي:

$KS.test(x, \text{"pnorm"}, m\mu, sigma)$

فإذا كانت$p.value > 0.05$ فإن البيانات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي .

مثال:.

$x < -rnorm\ (200)$

(عينة عشوائية لحجم 200سم^ التوزيع الطبيعي للمتوسط 0 والتباين 1)

الحل
$\mathrm{ks.test}(x_{,\text{"}pnorm\text{"}}\ )$

الناتج

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: x

D = 0.0631, p-value = 0.4031

alternative hypothesis: two-sided

التفسير

بما أن p. value=0.0631>0.05 فإن البيانات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي

- اختبار Shapiro:

يستخدم لاختبار الفرضية :

H_0: البيانات لها توزيع طبيعي

H_1: البيانات ليس لها توزيع طبيعي

ويمكن تطبيقه باستخدام R بالشكل التالي:

$KS.test(x,\text{pnorμ}, m\mu, sigma)$

وكانت $p > 0.05$ فإن البيانات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي.

3-3 اختبار($\mathbf{t}$) للعينة الواحدة لاختبار الفرضية

$$H_0: \mu = u_0$$

$$H_1: \mu : u_0$$

أي لاختبار اختلاف متوسط العينة μعن قيمة ما مثل m ومن تطبيقاته في الحياة العملية اختبار القيمة m فيما إذا كانت شاذة أولا.

باستخدام R نكتب التعليمة

$$t.test(x, m\mu = m)$$

شروط تطبيق اختبار t لعينة واحدة.

1- أن يكون متغير الدراسة كمياً.
2- أن تتوزع البيانات وفق التوزيع الطبيعي في عدم وجود قيمة شاذة.
3- عدم وجود قيمة شاذة.
4-أن يكون حجم العينة يشكل 5%علي الأقل من حجم المجتمع

.

مثال .: لتكن لدينا قياسات سكر الدم لمجموعة من المرضي الذين تم علاجهم باستخدام الدواءين $lamtus + R$ والمطلوب معرفة فيما إذا كان سكر الدم للعينة منطبطاً,علماً بأن متوسط سكر الدم الطبيعي لمرض السكر يعتبر 115.

$\boldsymbol{lantus + R}$ 80 115 125 110 123 112 69 115

الحل

$$x <- c(115,69,112,123,110,125,115,80)$$

$$t.test(x, mu = 115)$$

النتائج

One Sample t-test

data: x

t = -1.2314, df = 7, p-value = 0.2579

alternative hypothesis: true mean is not equal to 115

95 percent confidence interval:

89.0826 123.1674

sample estimates:

mean of x

106.125

التفسير:-

نلاحظ من البيانات السابقة أن قيمة المعنوية p-value=0.2579 أكبر من 0.05 وبالتالي لا نستطيع أن نرفض الفرضية الابتدائية التي تقول بعدم وجود اختلاف معنوي لسكر الدم عند المرضى عن سكر الدم الطبيعي وذلك عند مستوى المعنوية% 5 ، السطر الثاني يخبرنا بأن الفرضية البديلة تنص على أن متوسط سكر الدم للمجموعة يختلف عن 115 ، ويقصد بالسطر الثالث أنه سيتم إظهار % 95 فترة ثقة لمتوسط سكر الدم للمرضى، وبالسطر الرابع تم عرض فترة الثقة والتي كانت [123.1674,89.0826] والتي تعني أنه وبثقة % 95 في المجتمع الأصلي الذي سحبنا منه عينتنا سيكون متوسط سكر الدم بين 123.1674و89.0826 والسطر الخامس فمعناه :مقدرات العينة، والسطر السادس يعني متوسط x والذي تم إظهاره في السطر السابع، ويمكن تقدير متوسط المجتمع الذي سحبت منه العينةx 106.125

4-3 اختبار (t) لعينتين مستقلتين (Independent samples t. test)

يستخدم اختبار(t) للعينتين المستقلتين لاختبار الفرضية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

أي لاختبار اختلاف متوسط العينة μ_1 عن متوسط العينة μ_2 أي لمعرفة إذا كان هذا الفرق بين μ_2 و μ_1 هو فرق ذو أهمية إحصائي أوانه فقط بمجرد الصدفة هناك حالة أعم لاختبار t للعينتين المستقلتين وتصاغ الفرضيات بالشكل التالي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = m$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq m$$

ويدرس معنوية كون الفرق بين μ_1, μ_2 يساوي مقدار ثابت مثل m وللتطبيق نكتب التعليمة :

$$t.test(x, y, mu, paired = m)$$

ويمكن اهمال الوسط الثالث في حال كان m=0

شروط تطبيقه اختبار t للعينتين المستقلتين.

1- أن يكون متغير الدراسة كمياً.
2- أن تتوزع البيانات لكل من العينتين وفق التوزيع الطبيعي.
3- تجانس تباين العينتين.
4- أن تكون العينتان مستقلتين.
5- عدم وجود قيمة شاذة.
6- أن يكون حجم العينة يشكل 5% علي الأقل من حجم المجتمع.

مثال:. لتكن لدينا قياسات سكر الدم لمجموعتين من المرضي حيث تأخذ المجموعة الاولي الدواء A وتأخذ المجموعة *الثانية الدواءين* $A + B$:

A: 103 130 138 103 120 139 162 149 150

A + B: 150 50 107 123 111 125 116 69 107

والمطلوب معرفة أي الدواءين أفضل.

الحل

$x < c(150\ ,149\ ,162\ \ ,139\ \ \ ,120\ ,\ \ \ 103\ \ \ 138\ \ ,130\ \ ,103)$

$\mathrm{y} < -\mathrm{c}(107,\ \ 69,\ \ 116\ ,125,\ \ 111\ ,123\ ,\ \ 107\ ,50\ ,150)$

$\mathrm{t.test}\ \ \ (\mathrm{x,y})$

النتا ئج

Welch Two Sample t-test

data: x and y

t = 2.1571, d f = 14.197, p-value = 0.04861

alternative hypothesis: true in means is not equal to 0

95*percent confidence difference interval*:

52.2615073 0.1829372

sample estimates:

mean of x 132 *mean of y*

106.4444 6667.

التفسير:-

نلاحظ من البيانات السابقة أن قيمة p-value=0.04861 أقل من 0.05 وبالتالي نرفض الفرضية الابتدائية التي تقول بعدم وجود اختلاف معنوي بين سكر الدم في كل من المجموعتين؛ أي؛ يوجد اختلاف معنوي بين سكر الدم باستخدام العلاج الأول وسكر الدم باستخدام العلاج الثاني وذلك عند مستوى المعنوية% 5 ، السطر الثاني يخبرنا بأن الفرضية البديلة تنص على أن الفرق بين متوسطي المجموعتين يختلف إحصائياً عن الصفر، ويقصد بالسطر الثالث أنه سيتم إظهار % 95 فترة ثقة للفرق بين متوسطي المجموعتين، وبالسطر الرابع تم عرض فترة الثقة والتي كانت [0.1829372,52.2615073] والتي تعني أنه وبثقة % 95 في المجتمع الأصلي الذي سحبنا منه عينتنا لن يكون الفرق بين متوسطي المجموعتين أقل من 0.1829372 ولا أكبر من 52.2615073، أما السطر الخامس فمعناه :مقدرات العينة، والسطر السادس يعني متوسط x

ومتوسط y والتي تم إظهار كل منها في السطر السابع، ويمكن تقدير متوسط المجتمع الذي سحبت منه العينة x ب 106.44446667ومتوسط المجتمع الذي سحبت منه العينة y ب132.

4- اختبار t لعينتين مرتبطتين $(paired - sample\ \ t.test)$

يستخدم اختبار t لعينتين مرتبطتين لاختبار الفرضية:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ (متوسط المجتمع الأول يساوي متوسط المجتمع الثاني)

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (متوسط المجتمع الأول لا يساوي متوسط المجتمع الأول)

أي لاختبار اختلاف متوسط العينة μ_1 في ظرف ما عن متوسط العينة نفسها في ظرف أخر μ_2 ومعرفة إذا كان هذا الفرق هو فرق ذو أهمية إحصائية أو أنه فقط بمجرد الصدفة هناك حالة أعم لاختبار t للعينتين المرتبطتين وتصاغ الفرضيات بالشكل :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

ويدرس معنوية كون الفرق بين μ_2, μ_1 يساوي مقدار ثابت مثل وللتطبيق نكتب التعليمة:

$$t.test(x, y, m\mu, paired = T)$$

ويمكن اهمال الوسيط الثالث في حال كان $m\mu = 0$

شروط تطبيق اختبار t للعينتين المرتبطتين.

1- أن يكون متغير الدراسة كمياً.
2- ان يتوزع فرق العينتين وفق التوزيع الطبيعي.
3- ان تكون العينتان عبارة عن عينة واحدة مقاسة في طرفين مختلفين.
4- عدم وجود قيمة شاذة.
5-ان يكون حجم العينة يشكل 5 %علي الاقل من حجم المجتمع

مثال:.

قمنا بتطبيق نظام حمية علي عينة من النساء لمدة شهر وقمنا بتسجيل أوزانهن قبل وبعد الحمية فكانت النتائج كما يلي:

قبل الحمية	55	56	52	49	52	74	53	59	55
بعد الحمية	50	50	49	38	48	44	38	42	50

والمطلوب معرفة فيما إذا كانت الحمية مجدية:

الحل:.

$x < -c(55,59,53,74,52,49,52,56,55)$

$\mathrm{y} < -\mathrm{c}(50,42,38,44,48,38,49,50,50)$

t. test (x,y,paired=T)

الناتج

Paired t-test

data: x and y

t = 3.6291, d f = 8, p-value = 0.006694

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95percent confidence interval:

17.444471 3.888862

sample estimates:

mean of the differences

10.66667

التفسير:-

نلاحظ من البيانات السابقة أن قيمة p-value=0.006694 أقل من 0.05 وبالتالي نرفض الفرضية الابتدائية التي تقول بعدم وجود اختلاف معنوي بين الأوزان في كلتا الحالتين أي يوجد اختلاف معنوي بين أوزان النساء قبل الحمية وأوزان النساء بعد الحمية وذلك عند مستوى المعنوية% 5 ، السطر الثاني يخبرنا بأن الفرضية البديلة تنص على أن الفرق بين متوسط

المجموعتين يختلف إحصائياً عن الصفر، ويقصد بالسطر الثالث أنه سيتم ، أما السطر الخامس فمعناه :مقدرات العينة، والسطر السادس يعني متوسط الفرق بين المجموعتين والذي سيتم إظهاره في السطر السابع، ويمكن تقدير متوسط الفرق بين إظهار59% فترة ثقة للفرق بين متوسطي المجموعتين، وبالسطر الرابع تم عرض فترة الثقة والتي كانت [17.444471,3.888862] والتي تعني أنه وبثقة % 95 في المجتمع الأصلي الذي سحبنا

منه عينتنا لن يكون الفرق بين متوسطي المجموعتين أكبر من 17.444471ولا أقل من 3.888862 أوزان النساء قبل وبعد الحمية ب10.66667.

الفصل الرابع:

الاستنتاجات والتوصيات

1.4 تمهيد:

في هذا البحث تم التطرق إلي توزيع تي ودراسة بعض خصائصه النظرية وبيان كيفية استخدامه في تحقيق عدة أهداف مثل:

1-استخدام توزيع تي في اختبار حول متوسط واحد.

2-استخدام توزيع تي في اختبار الفرق بين متوسطين لعينتين مستقلتين.

3-استخدام توزيع تي في اختبار الفرق بين متوسطين لعينتين غير مستقلتين.

4-استخدام توزيع تي في تكوين فترات الثقة للفرق بين متوسطين لعينتين مستقلتين وغير مستقلتين.

2.4 الاستنتاجات:

دالة كثافة الاحتمال لتوزيع t لا تعتمد علي أي معالم معلومة.

له نقطتي انقلاب عند $t \pm \sqrt{\frac{n}{n+2}}$ بمعني ان منحني التوزيع يغير اتجاهه عند هاتين النقطتين.

التوصيات:

توصي الباحثة ما يلي-:

استخدام برامج أخري مثل SPSS وغيرها في التطبيقات العملية.

دراسة توزيع t اللامركزي وبيان أهم استخداماته.

التعرف علي توزيع المعاينة الخاص بالوسط الحسابي لعينة واحدة

التعرف علي توزيع المعاينة الخاص للفرق بين وسطين حسابيين

الملاحق

احصائي الاختبار وفترات الثقة لعينتين مستقلتين في حالة معلومية وعدم معلومية التباينات

فترة الثقة	إحصائية الاختبار	تبايني المجتمعين	
$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,Z_{(1-\alpha/2)}$	$Z^*=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)_o}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$		معلـــــــــــــــوم
$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\,t_{(1-\alpha/2\,,\,n_1+n_2-2)}$	$t^*=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	غير معلوم
$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\,t_{(1-\alpha/2\,,\,\nu)}$	$t^*=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	

المراجع

1- أميرة حنا هرمز(1990)جامعة الموصل – الإحصاء الرياضي- دار الكتب لطباعة والنشر.

2- وفاء طه عبدالله (2006)- الإحصاء الرياضي- دار الكتب الوطنية بنغازي.

3- محمد عبد العال النعيمي و جسين ياسين طعمة (2015) - الإحصاء التطبيقي- دار وائل للنشر.

4- علي عبد السلام العماري و علي حسن العجيلي (2000) -الإحصاء و الاحتمالات النظرية والتطبيق - دارEIGA.

5- عبد الحميد البداوي (2008) – الأساليب الإحصائية التطبيقية - دار الشروق للنشر والتوزيع.

6- نجاة رشيد الكيخا ردمك :(5-0037-1-9959)- أ سياسيات الاستنتاج الإحصائي –دار الكتب الوطنية بنغازي- ليبيا.

7- محمد شامل بهاء الدين (2005)- الإحصاء بلا معاناة- مركز البحوث.